

A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of a network of white lines and small circles on a dark blue background, resembling a circuit board or a neural network.

NUMERI COMPLESSI E LORO APPLICAZIONI

MODULO 2.0: STRUMENTI MATEMATICI

FONTI

- P. Nisini; Algebra elementi di analitica e di analisi matematica. Trevisini editore Milano
- <https://slideplayer.it/slide/3774920/>
- <https://slideplayer.it/slide/13742615/>
- <https://slideplayer.it/3647694/>
- <https://slideplayer.it/slide/10392853/>
- <http://www.edutecnica.it/matematica/ncx/ncx.htm>
- <https://www.youmath.it/>

PROBLEMI IRRISOLVIBILI?

L'equazione di secondo grado

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali, ovvero non ci sono numeri reali che elevati alla seconda diano -1 (infatti $-1^2=1$ e $1^2=1$)

Tuttavia per un attimo consideriamo $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt{-1} * \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Di conseguenza, anche se $\sqrt{-1}$ non esiste, esso è una soluzione dell'equazione data

Anche $-\sqrt{-1}$ è soluzione dell'equazione, infatti

$$-\sqrt{-1} * -\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

L'UNITÀ IMMAGINARIA

- L'insieme dei numeri reali ha una “struttura” matematica che permette di risolvere moltissimi problemi, ma è insufficiente nella risoluzione di equazioni del tipo $x^2 + 1 = 0$
- Se però indichiamo con $i = \sqrt{-1}$, ecco che $(\pm i)^2 = -1$ e quindi abbiamo trovato che i e $-i$ sono le due soluzioni dell'equazione data
- i si chiama unità immaginaria perché è un numero che non esiste, mentre assume un significato reale il suo quadrato, infatti $i^2 = -1$

I NUMERI IMMAGINARI

- Si consideri ora l'equazione $x^2 + 4 = 0$
- Estendendo il ragionamento fatto finora si osserva che

$$\sqrt{-2} * \sqrt{-2} = (2 * \sqrt{-1})^2 = (2 * i)^2 = -4$$

- In modo analogo si osserva

$$-\sqrt{-2} * (-\sqrt{-2}) = (-2 * \sqrt{-1})^2 = (-2 * i)^2 = -4$$

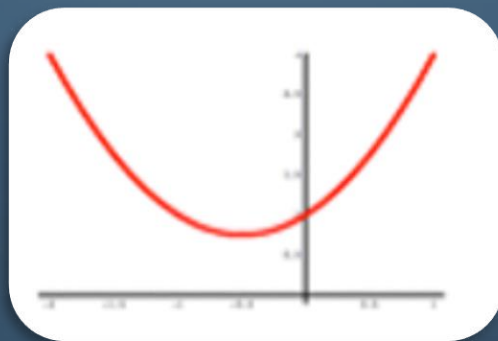
- Quindi i due numeri $2i$ e $-2i$ sono le due soluzioni dell'equazione data
- Più in generale si chiamano numeri immaginari il prodotto tra un numero reale e l'unità immaginaria, per esempio $2i$, $3i$, $-4i$, ...
- I numeri immaginari risolvono il problema di determinare la radice quadrata di un numero reale negativo

OSSERVAZIONE SUI NUMERI IMMAGINARI

- I numeri immaginari sono un'estensione dei numeri reali, tuttavia non bisogna cadere nella tentazione di usarli come se fossero anch'essi numeri reali
- Per esempio una qualunque grandezza fisica, come una distanza, un peso, un intervallo di tempo, non potranno mai assumere valori immaginari

I NUMERI COMPLESSI

- Si cerchino ora le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2 - 4x + 8 = 0$
- Si osserva che $\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$, quindi non si hanno soluzioni reali, se infatti si considera la parabola con la stessa equazione, questa non interseca mai l'asse x



- Se tuttavia adoperiamo la ben nota formula risolutiva si ottengono le soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16} * \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 2i$$

- Questo ci permette di intuire che in generale le soluzioni sono date dalla somma di un numero reale e un numero immaginario

I NUMERI COMPLESSI

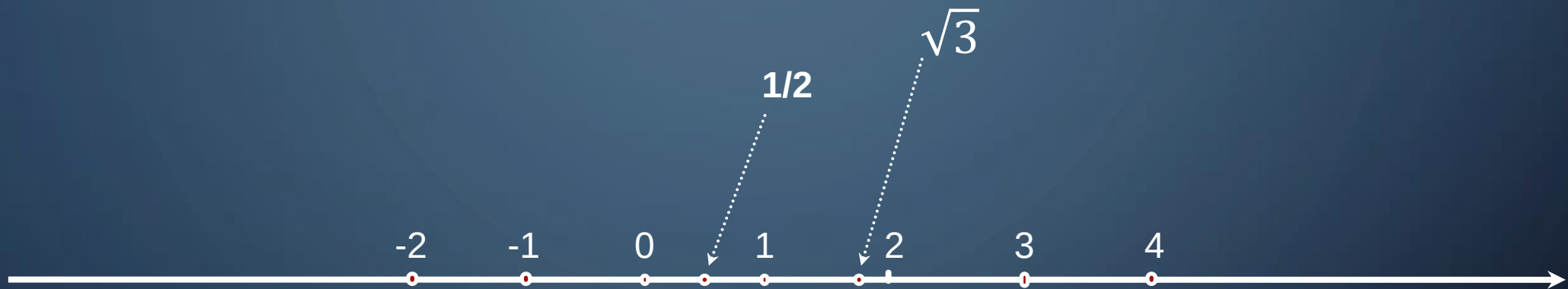
- la somma di un numero reale e un numero immaginario prende il nome di numero complesso
- Un generico numero complesso si esprime nella forma $a + ib$ dove il numero reale a si chiama parte reale e il numero reale b si chiama parte immaginaria

OSSERVAZIONE SULL'UNITÀ IMMAGINARIA

- In matematica l'unità immaginaria viene sempre indicata con la lettera i (minuscola)
- In ambito ingegneristico la lettera i è spesso associata all'intensità di corrente
- Per evitare cattive interpretazioni in questo secondo ambito è comune indicare l'unità immaginaria con la lettera j (minuscola) invece che con i

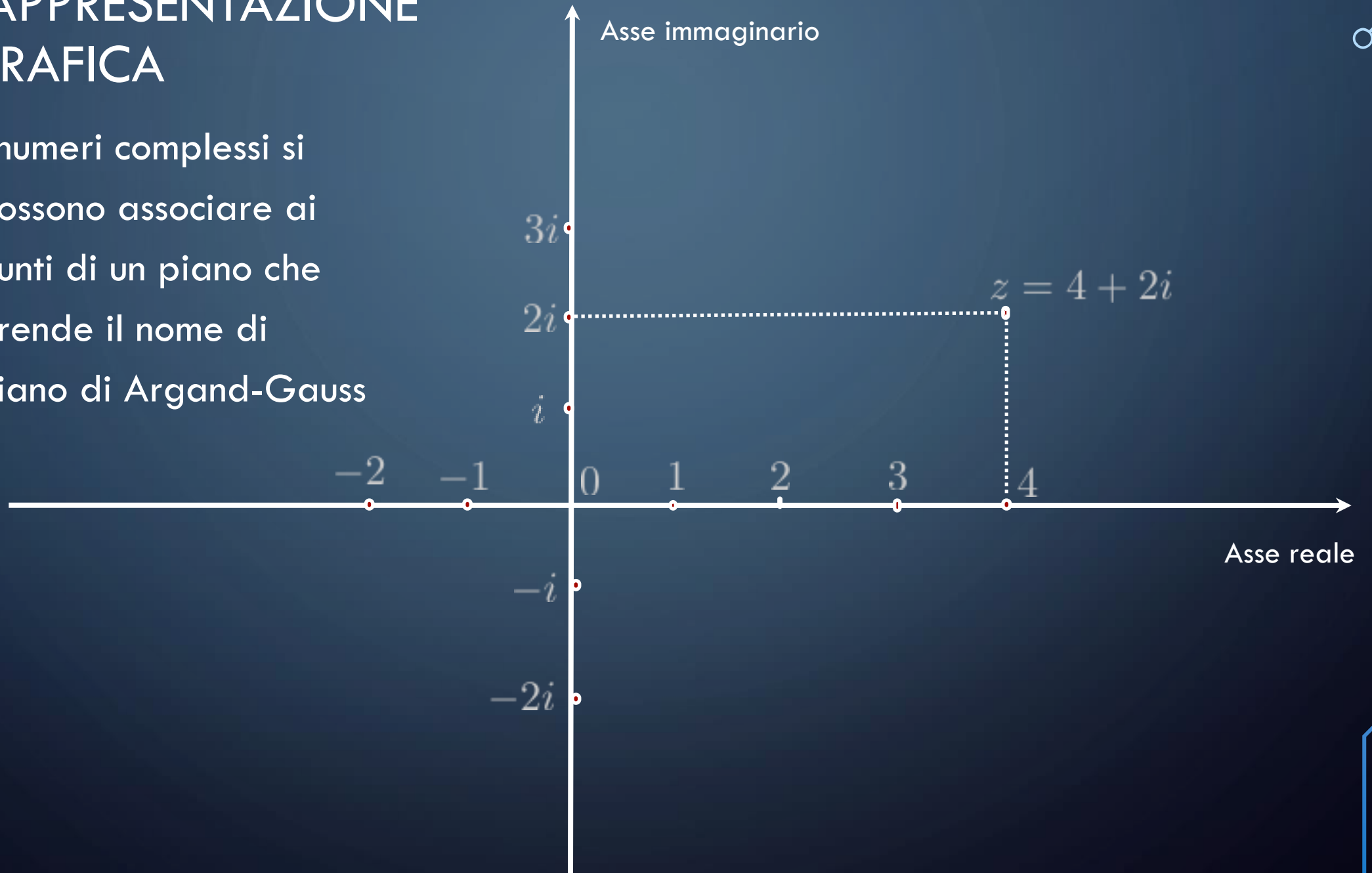
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- I numeri reali si possono associare ai punti di una retta

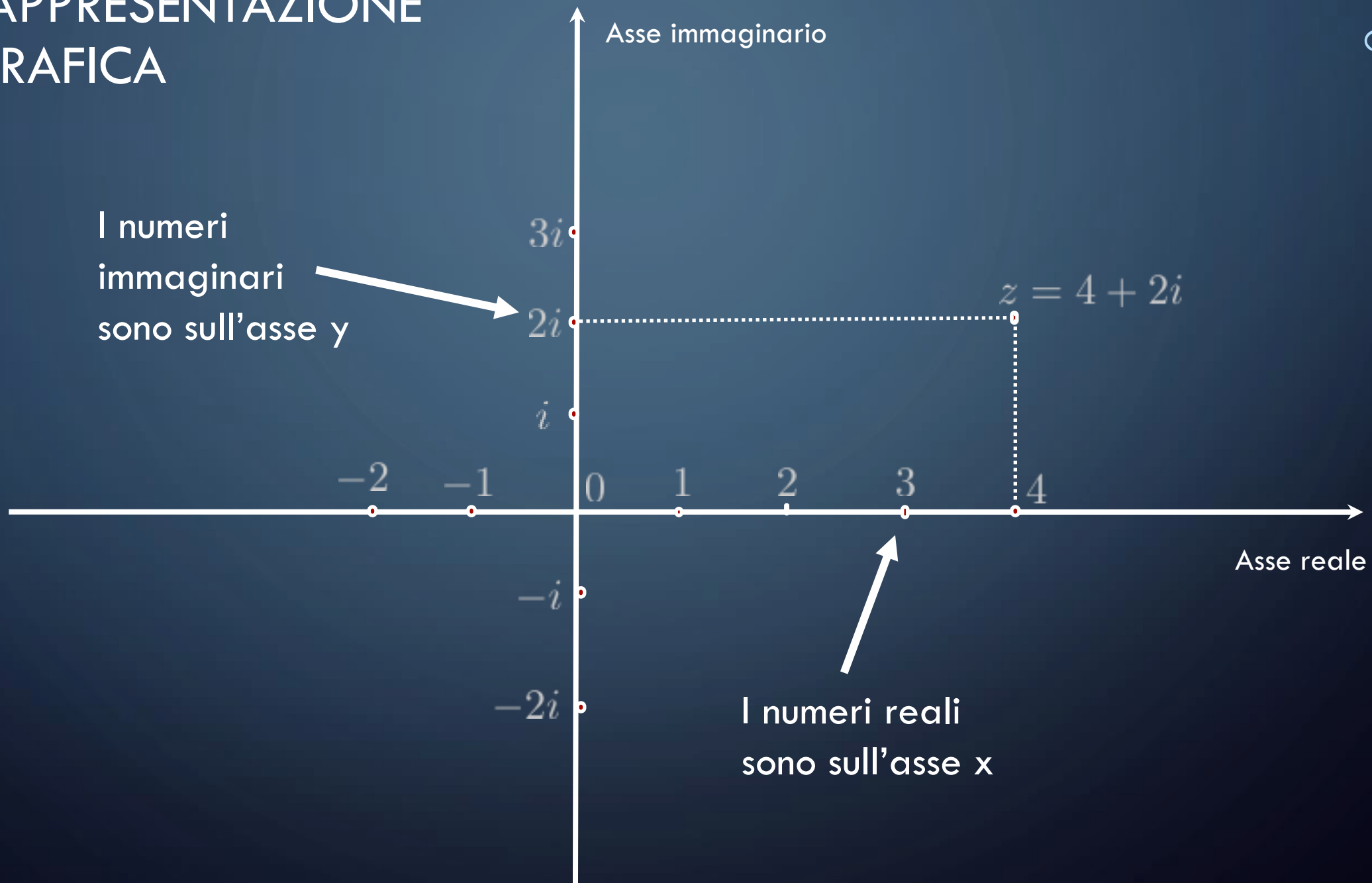


RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- I numeri complessi si possono associare ai punti di un piano che prende il nome di piano di Argand-Gauss



RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



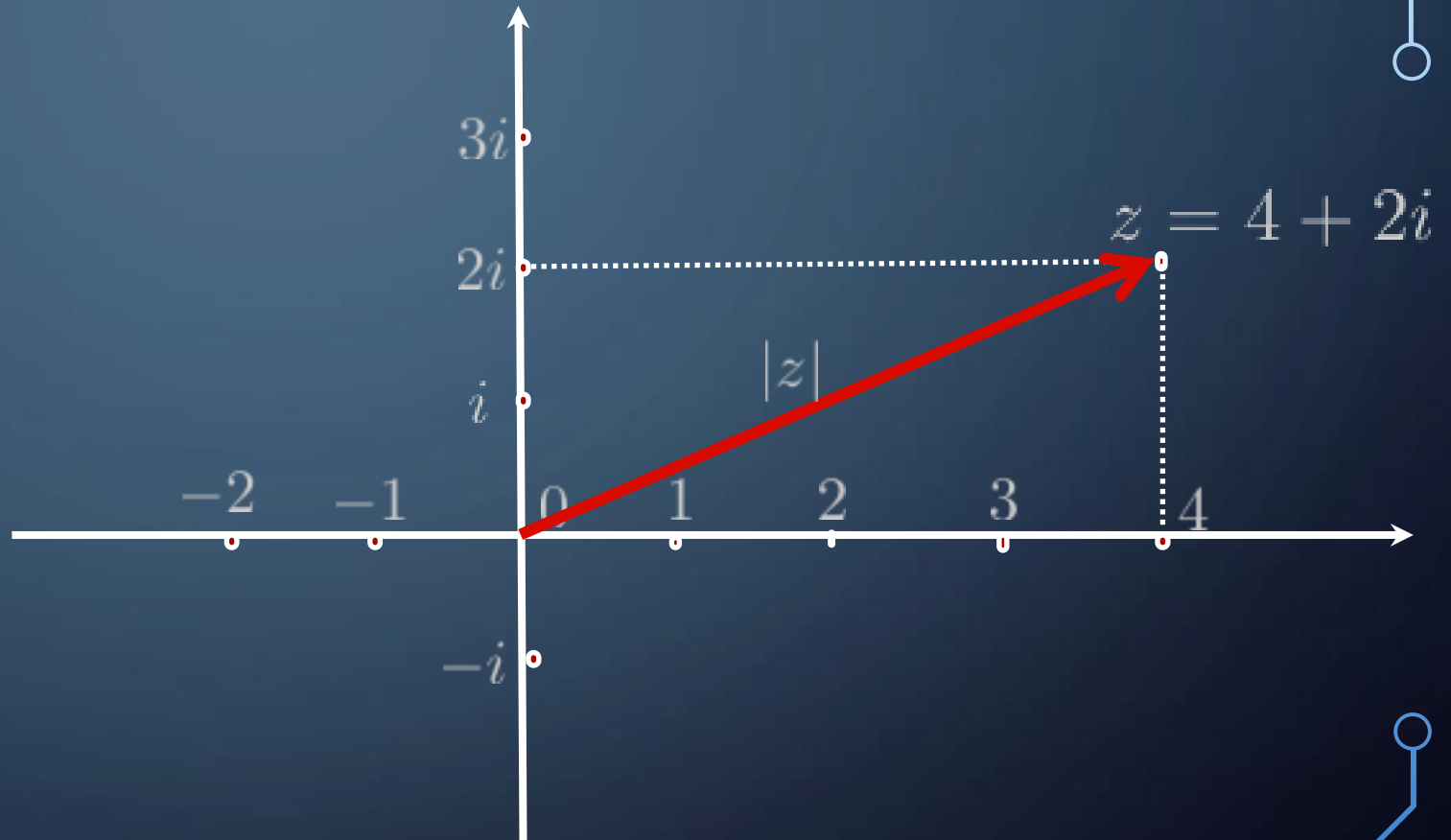
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA



DEFINIZIONE DI MODULO

- Il modulo di un numero complesso è la sua distanza dall'origine degli assi
- Se il numero complesso è $z = 4 + 2i$ il suo modulo (uso il teorema di Pitagora) è

$$|z| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

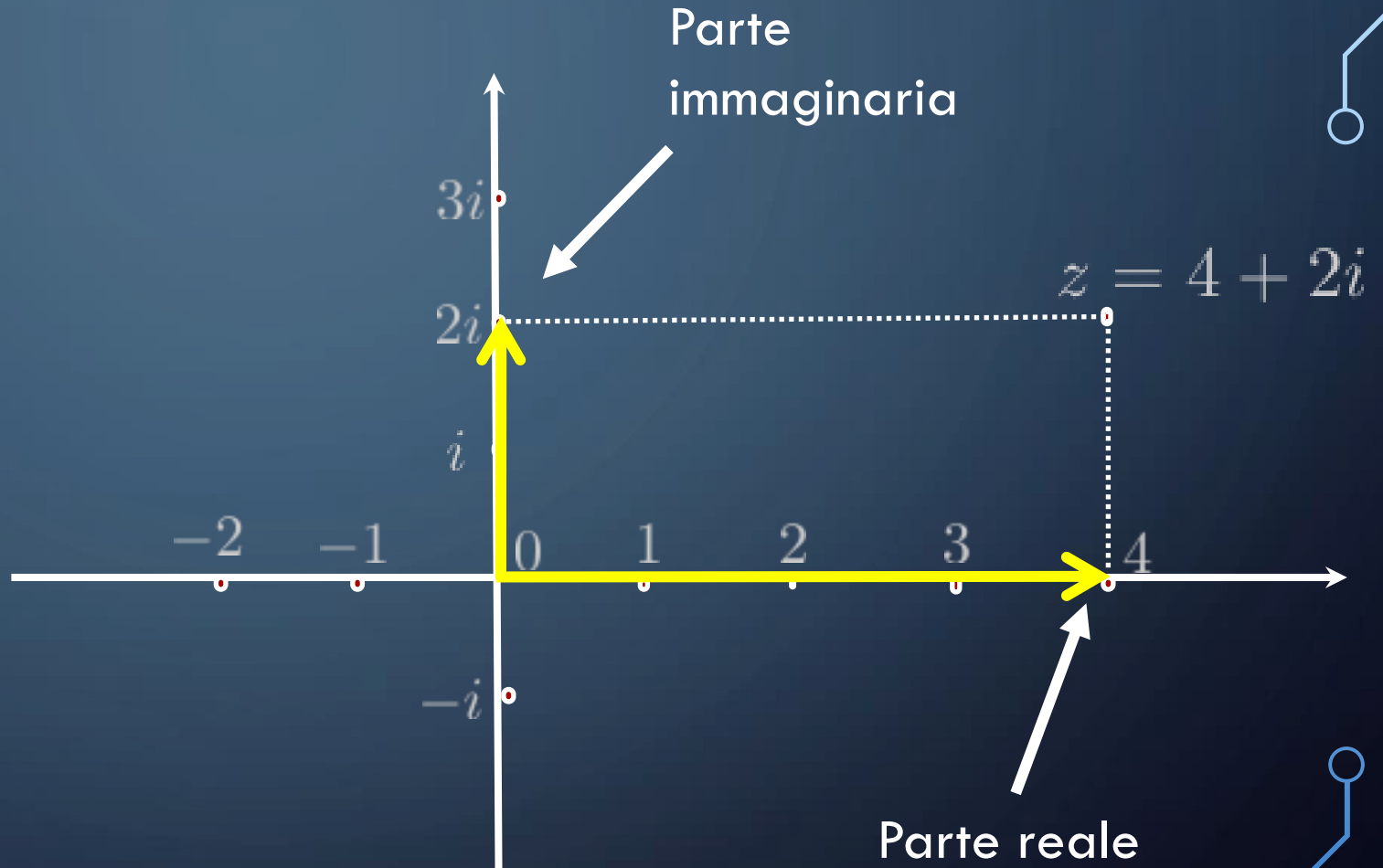


PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA

- La proiezione del numero complesso sull'asse reale è la parte reale e quella sull'asse immaginario è la parte immaginaria

$$\operatorname{Re}(z) = 4$$

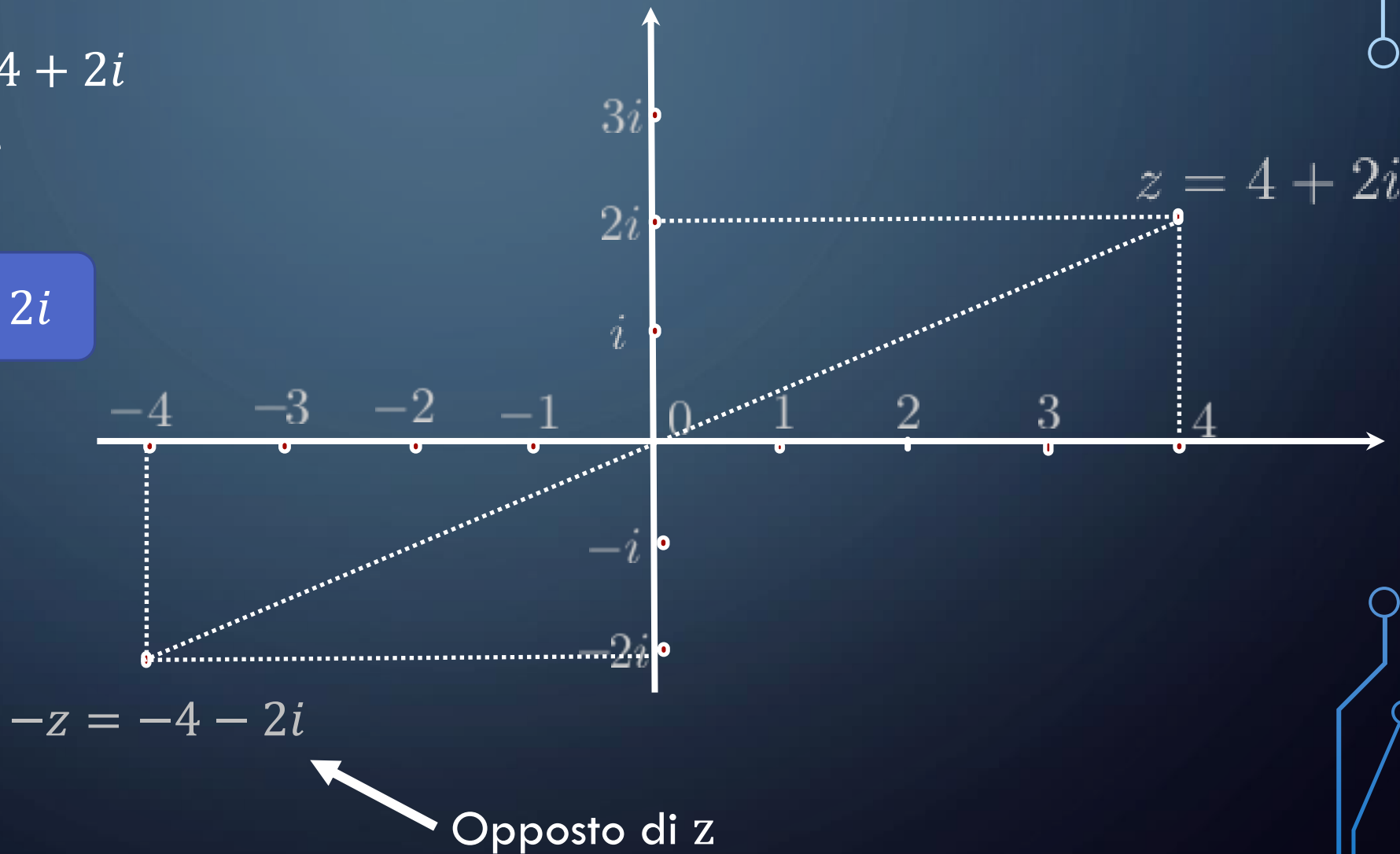
$$\operatorname{Im}(z) = 2$$



OPPOSTO

- Preso il numero complesso $z = 4 + 2i$ il suo opposto è

$$-z = -4 - 2i$$



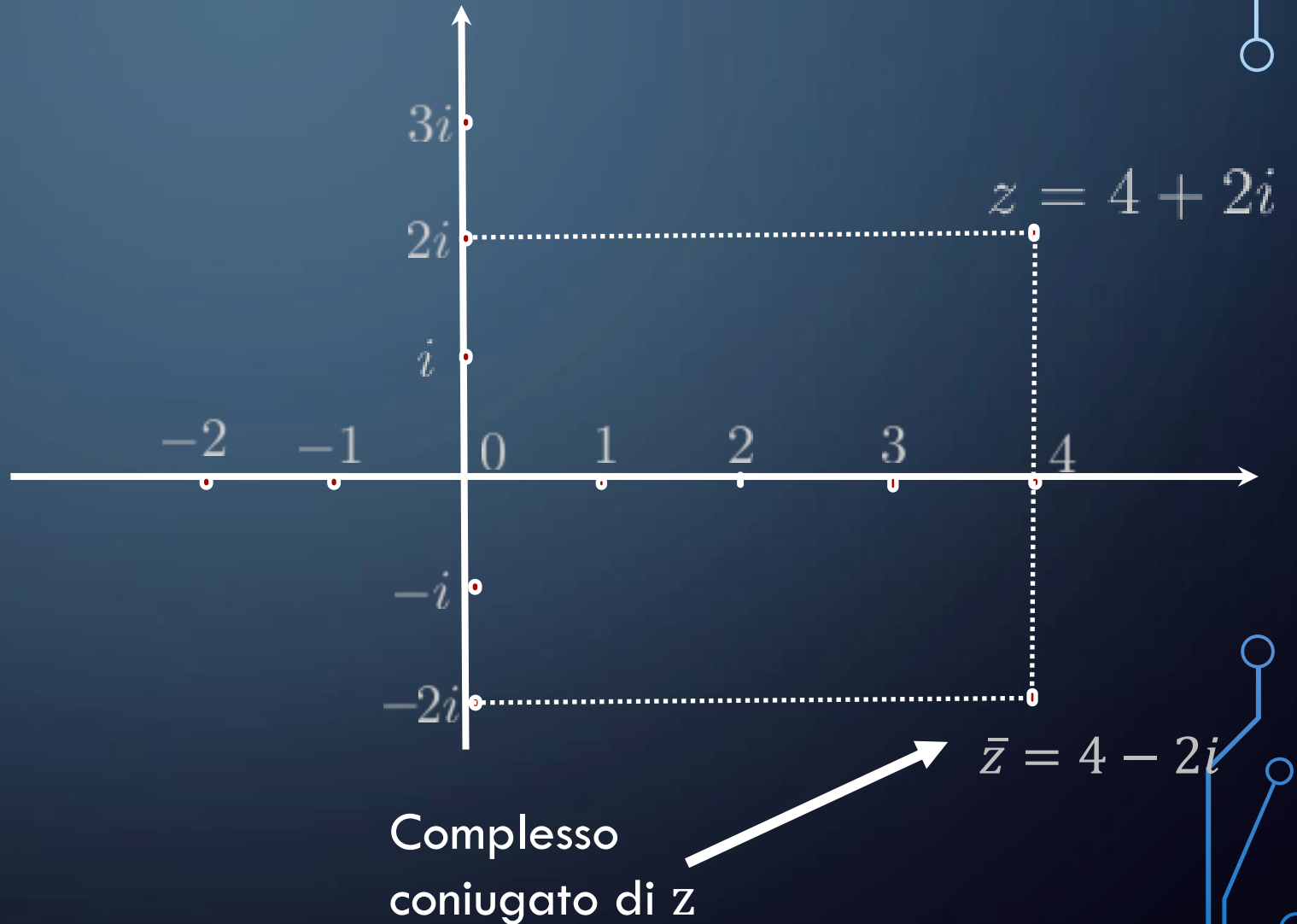
COMPLESSO CONIUGATO

- Preso il numero complesso $z = 4 + 2i$ il suo complesso coniugato è

$$\bar{z} = 4 - 2i$$

- Il complesso coniugato viene indicato anche con z^*

$$z^* = 4 - 2i$$



RICAPITOLANDO

- Preso il numero complesso $z = a + ib$
- Il suo modulo è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- La sua parte reale è $Re(z) = a$ e la sua parte immaginaria $Im(z) = b$
- Il suo opposto è $-z = -a - ib$
- Il suo complesso coniugato è $\bar{z} = a - ib$

ESERCIZIO

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo, opposto e complesso coniugato dei seguenti numeri complessi

$$a+ib=2 + i3$$

$$a+ib= - 5 + i7$$

$$a+ib= - 15 - 3i$$

$$a+ib=12 - 6i$$

ESERCIZIO

Determinare parte reale, parte immaginaria, modulo, opposto e complesso coniugato dei seguenti numeri complessi

$$a+ib=2 + i3$$

Parte reale $a=2$, parte immaginaria $b=3$, modulo $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,
opposto $-a-ib=-2-i3$, complesso coniugato $a-ib=2-i3$

$$a+ib= - 5 + i7$$

Parte reale $a=-5$, parte immaginaria $b=7$, modulo $\sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}$,
opposto $-a-ib=5-i7$, complesso coniugato $a-ib=-5-i7$

$$a+ib= - 15 - 3i$$

Parte reale $a=-15$, parte immaginaria $b=-3$, modulo $\sqrt{(-15)^2 + (-3)^2} = \sqrt{234}$,
opposto $-a-ib=15+i3$, complesso coniugato $a-ib=-15+i3$

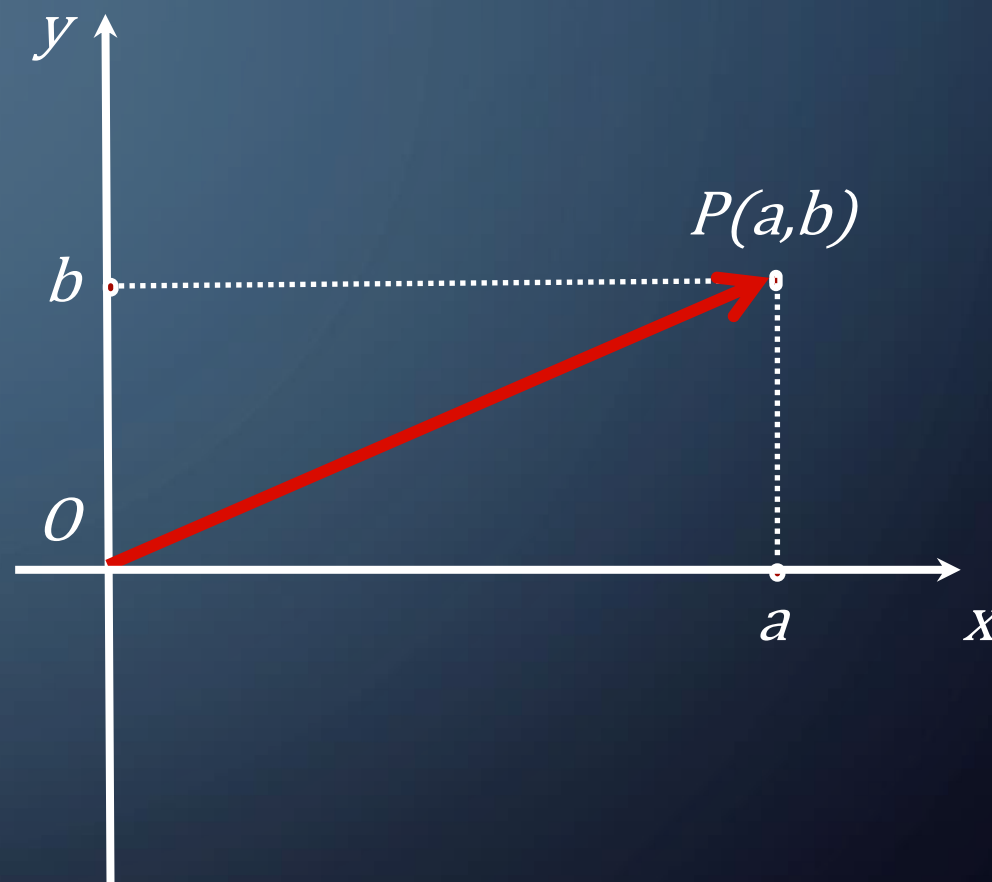
$$a+ib=12 - 6i$$

Parte reale $a=12$, parte immaginaria $b=-6$, modulo $\sqrt{12^2 + (-6)^2} = \sqrt{180}$,
opposto $-a-ib=-12+i6$, complesso coniugato $a-ib=12+i6$

NUMERI COMPLESSI E VETTORI

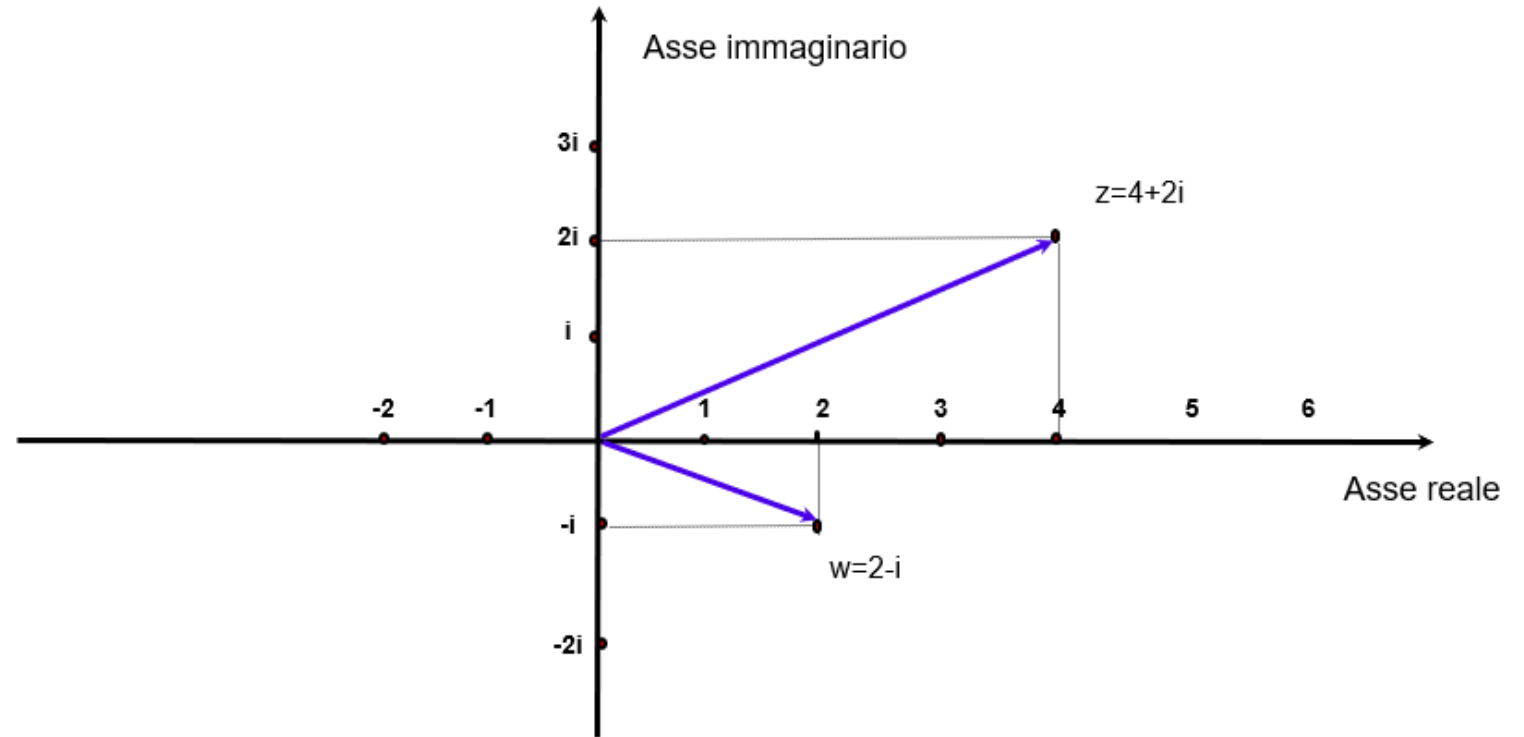
- Fissato come riferimento cartesiano ortogonale il piano di Gauss con assi x e y e un numero complesso $z = a + ib$, resta identificato il vettore $\overrightarrow{OP}$ dove O è l'origine degli assi e P il punto di coordinate (a,b)

- È quindi sempre possibile associare un vettore ad ogni numero complesso (e viceversa) e UTILIZZARE LE OPERAZIONI DEFINITE PER I VETTORI ANCHE PER I NUMERI COMPLESSI



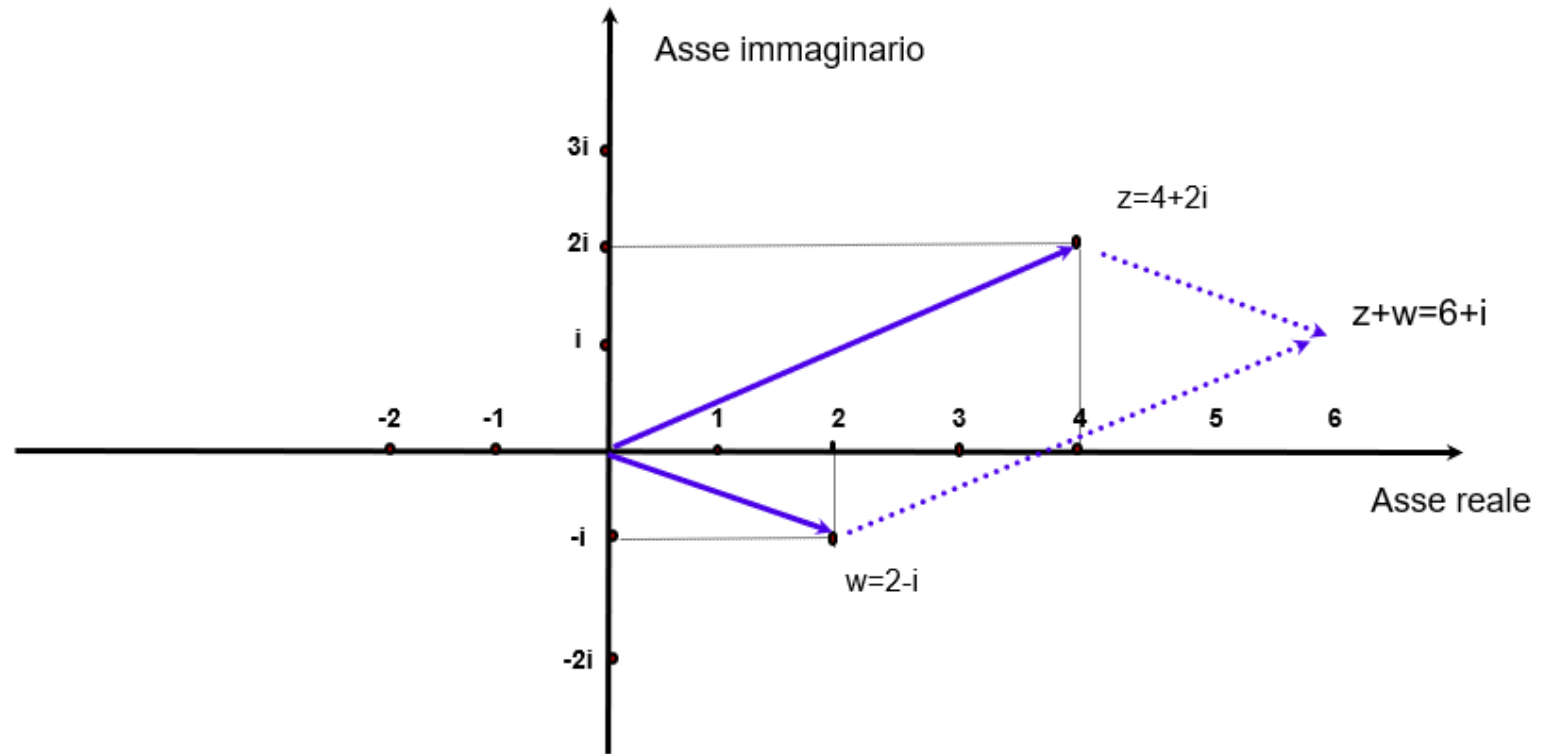
SOMMA DI NUMERI COMPLESSI (SOMMA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma



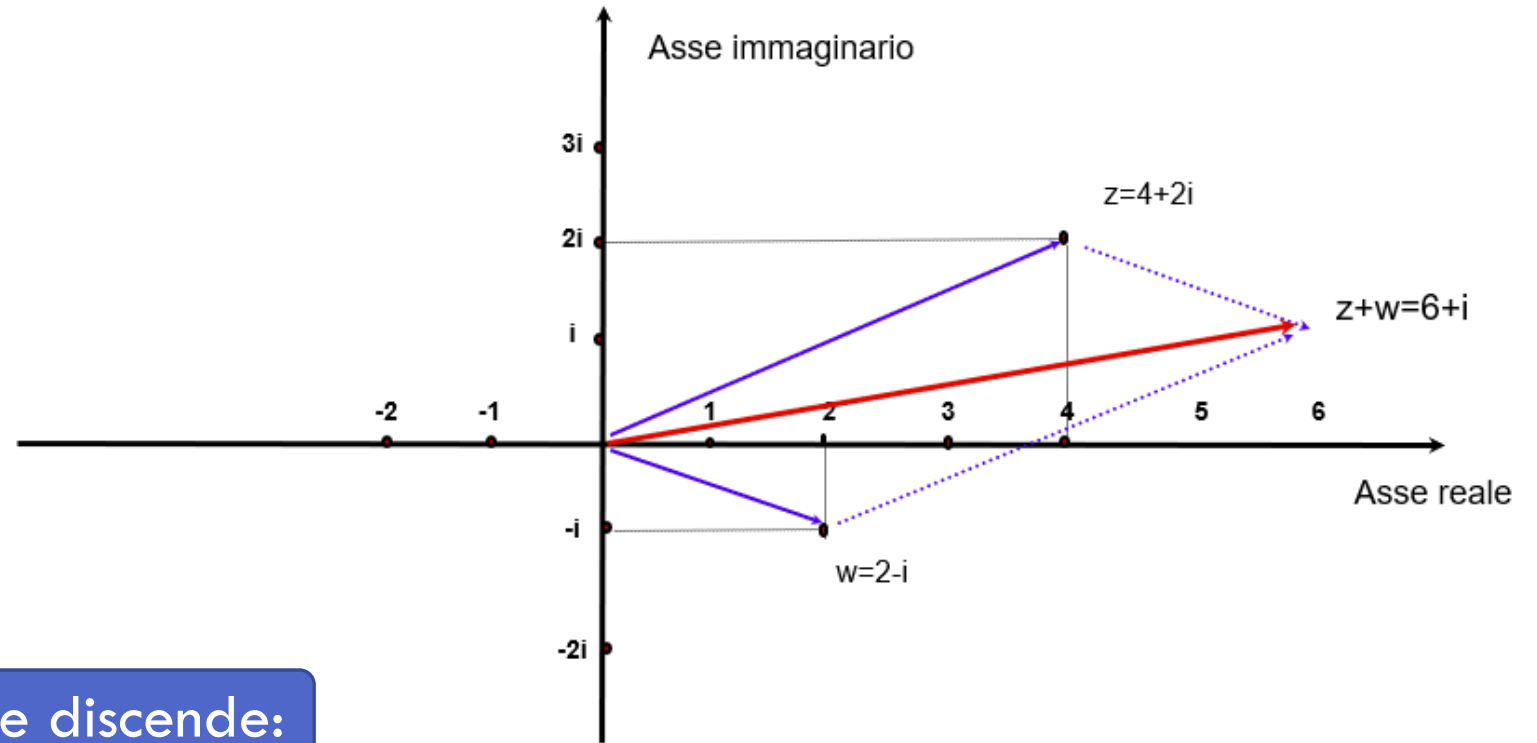
SOMMA DI NUMERI COMPLESSI (SOMMA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma



SOMMA DI NUMERI COMPLESSI (SOMMA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma

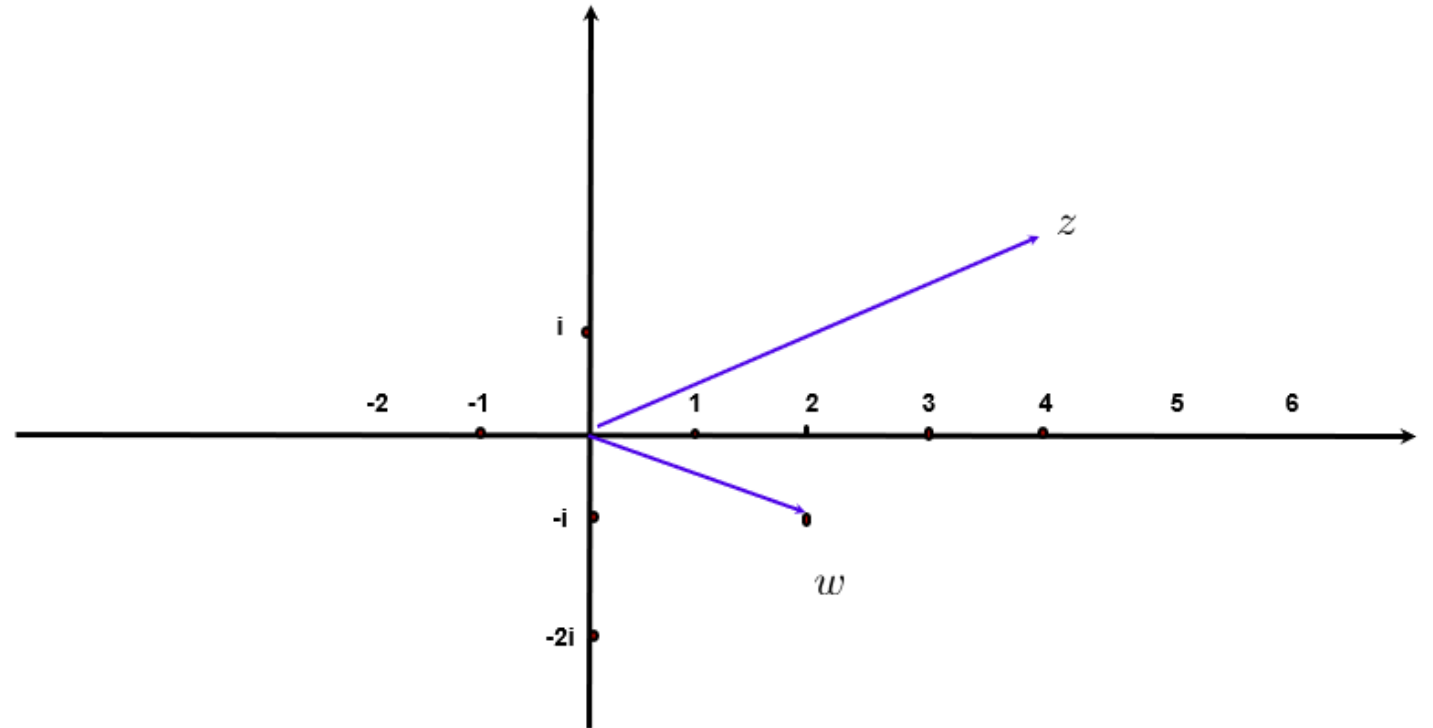


Ne discende:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

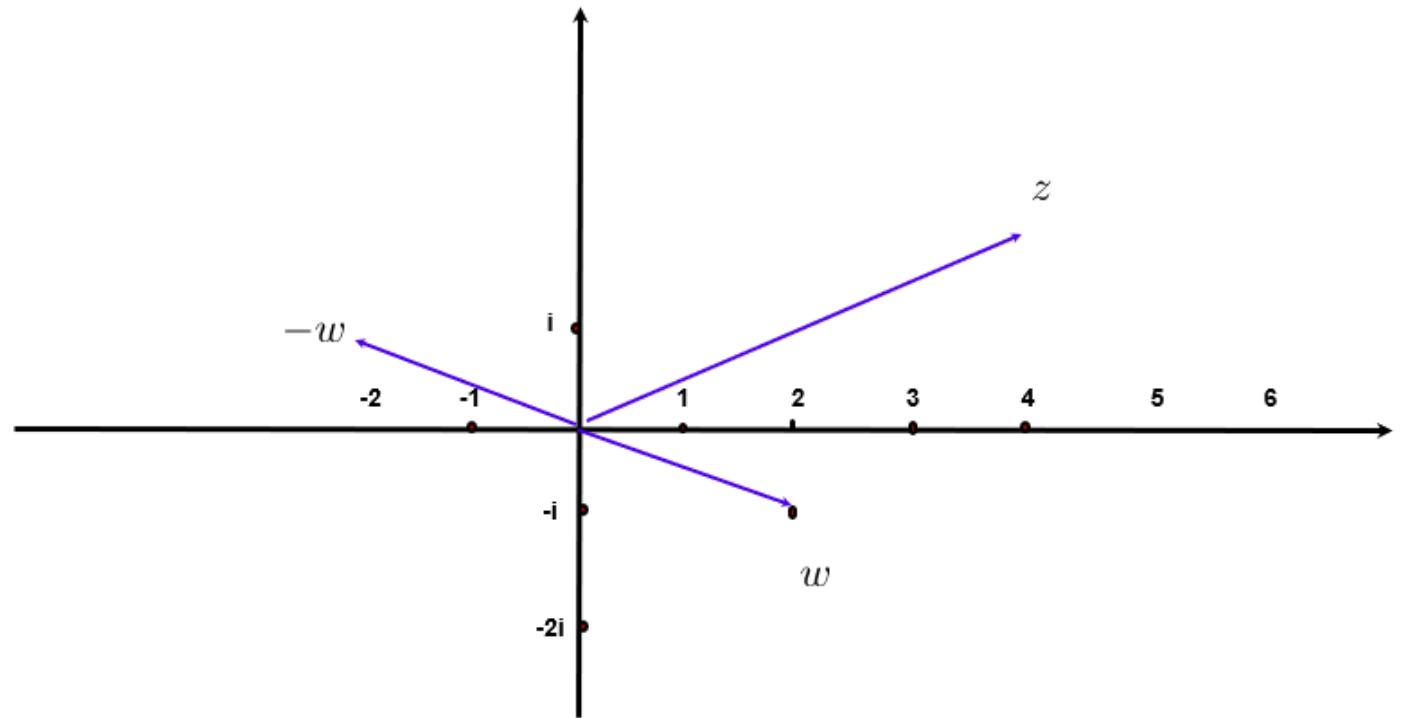
DIFFERENZA DI NUMERI COMPLESSI (DIFFERENZA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma ricordando che
$$z - w = z + (-w)$$



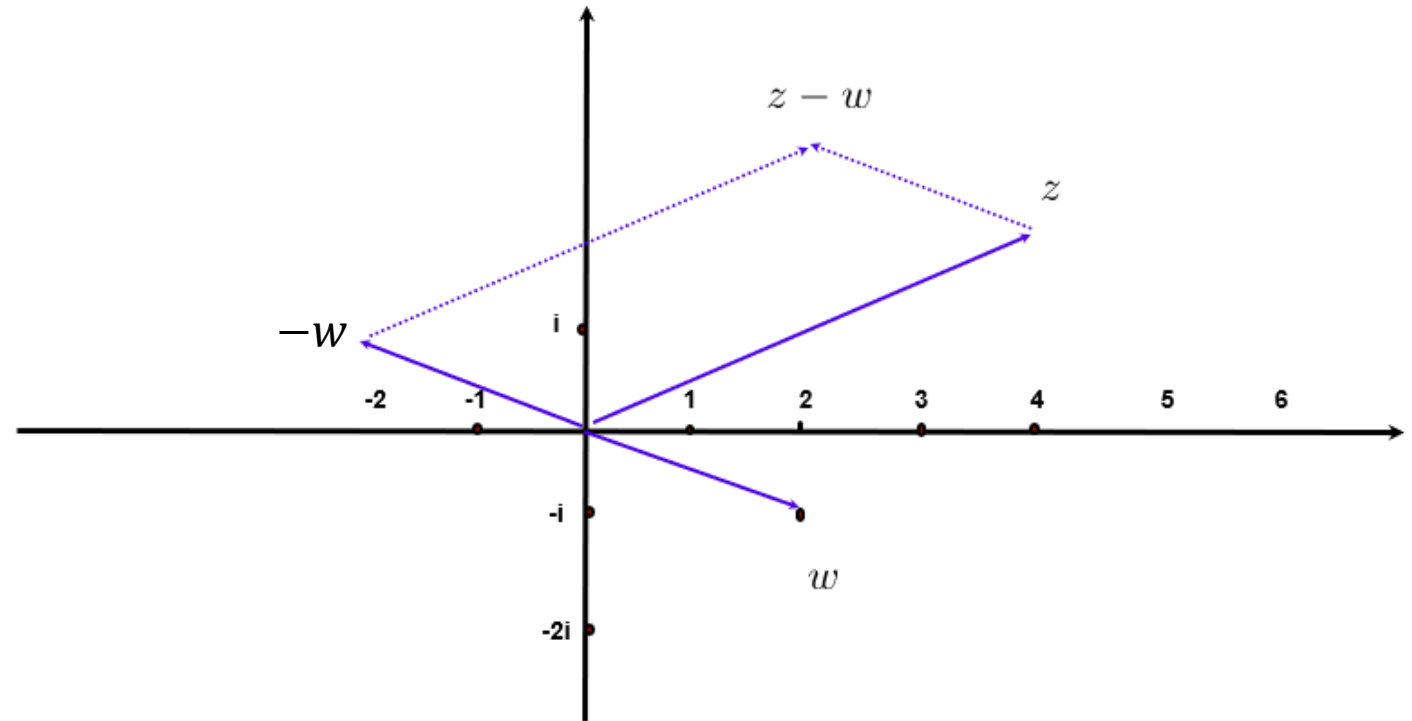
DIFFERENZA DI NUMERI COMPLESSI (DIFFERENZA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma ricordando che
$$z - w = z + (-w)$$



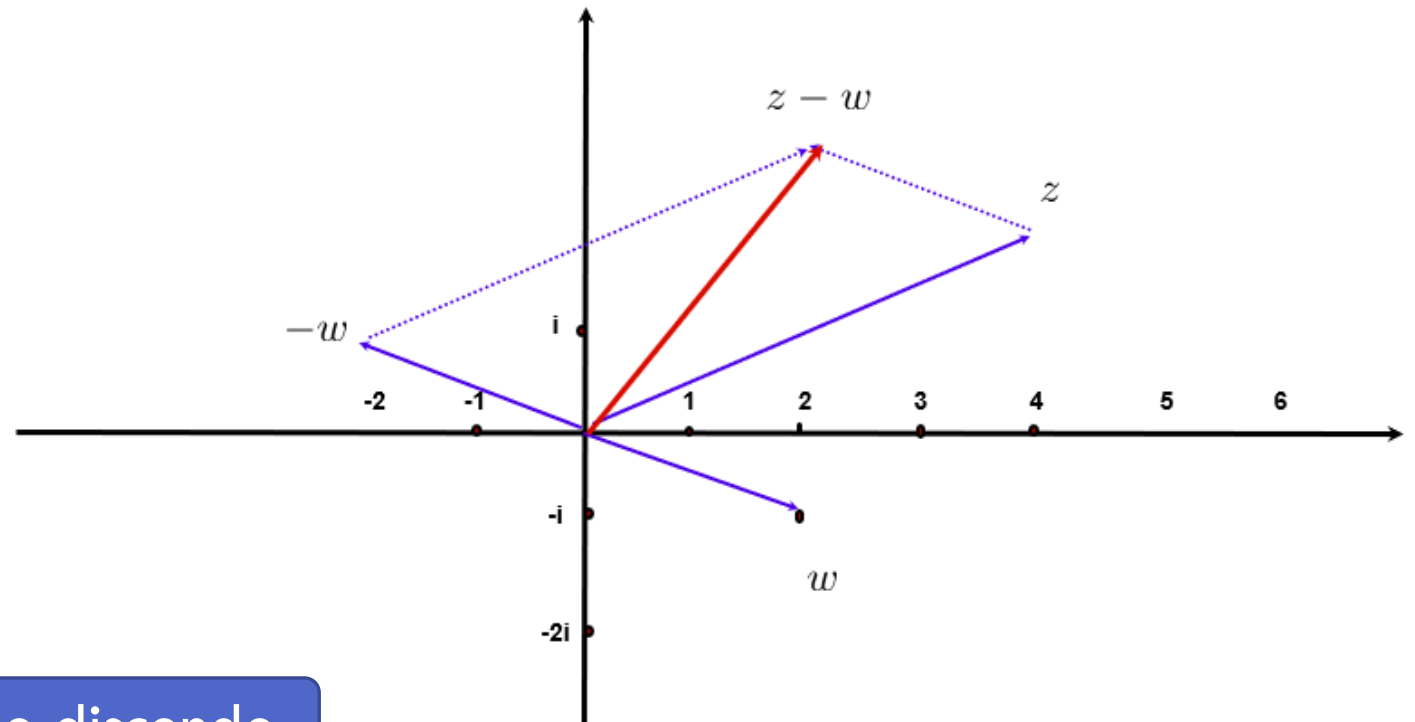
DIFFERENZA DI NUMERI COMPLESSI (DIFFERENZA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma ricordando che
$$z - w = z + (-w)$$



DIFFERENZA DI NUMERI COMPLESSI (DIFFERENZA DI VETTORI)

- Si usa la regola del parallelogramma ricordando che
$$z - w = z + (-w)$$



Ne discende:

$$z - w = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

ESERCIZIO

Eseguire la somma e la differenza tra i seguenti numeri complessi

$$A=3 - 4i \quad B=-5 + 7i$$

$$A=4 - 2i \quad B=-1 + 3i$$

$$A=10 + 2i \quad B=-10$$

$$A=5 - 2i \quad B=-4i$$

ESERCIZIO

Eseguire la somma e la differenza tra i seguenti numeri complessi

$$A=3-4i \quad B=-5+7i \quad A+B=-2+3i \quad A-B=8-11i$$

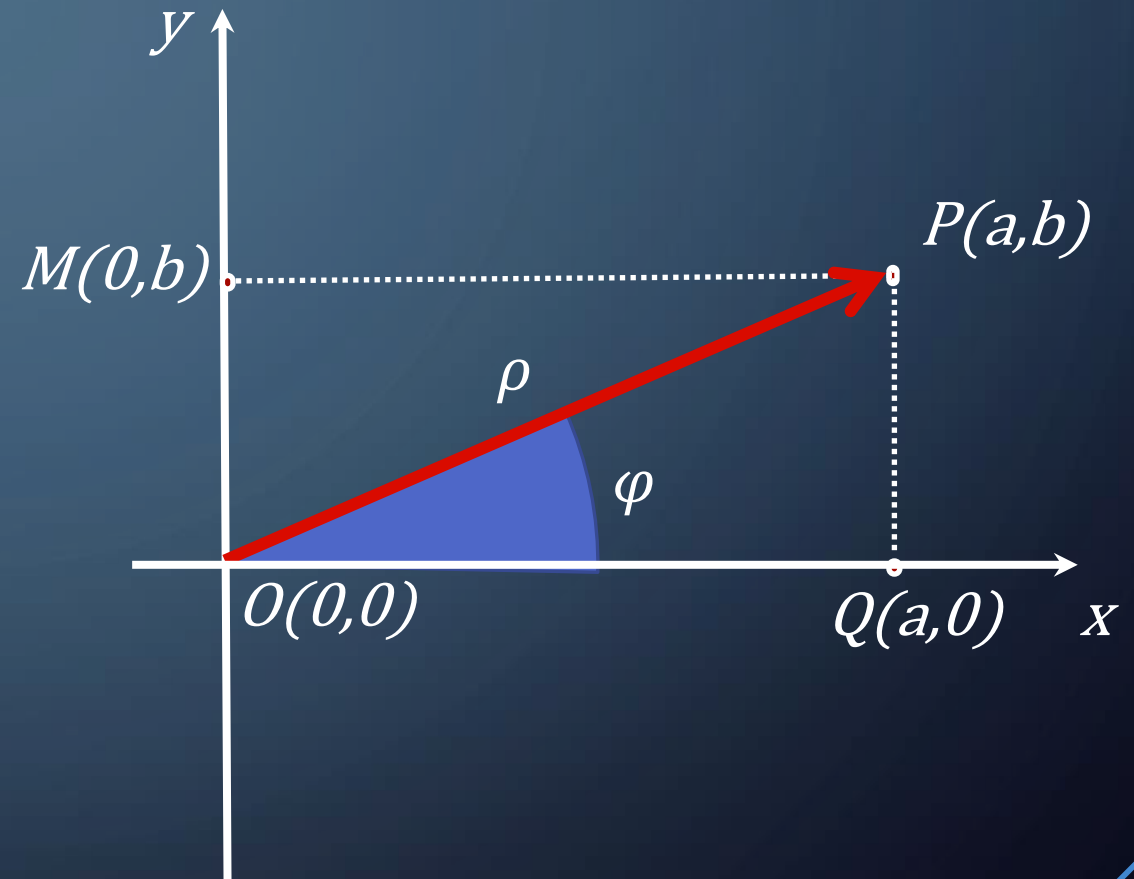
$$A=4-2i \quad B=-1+3i \quad A+B=3+i \quad A-B=5-5i$$

$$A=10+2i \quad B=-10 \quad A+B=2i \quad A-B=20+2i$$

$$A=5-2i \quad B=-4i \quad A+B=5-6i \quad A-B=5+2i$$

FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

- Sia $\overrightarrow{OP}$ il vettore corrispondente al numero complesso $a + ib$, sia ρ il modulo del vettore (corrispondente con il modulo del numero complesso) e sia φ l'angolo che il vettore forma con l'asse x
- I due valori ρ e φ si dicono rispettivamente **MODULO** e **ARGOMENTO** del numero complesso $a + ib$



FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

- Si consideri ora il triangolo rettangolo OPQ; si osserva che

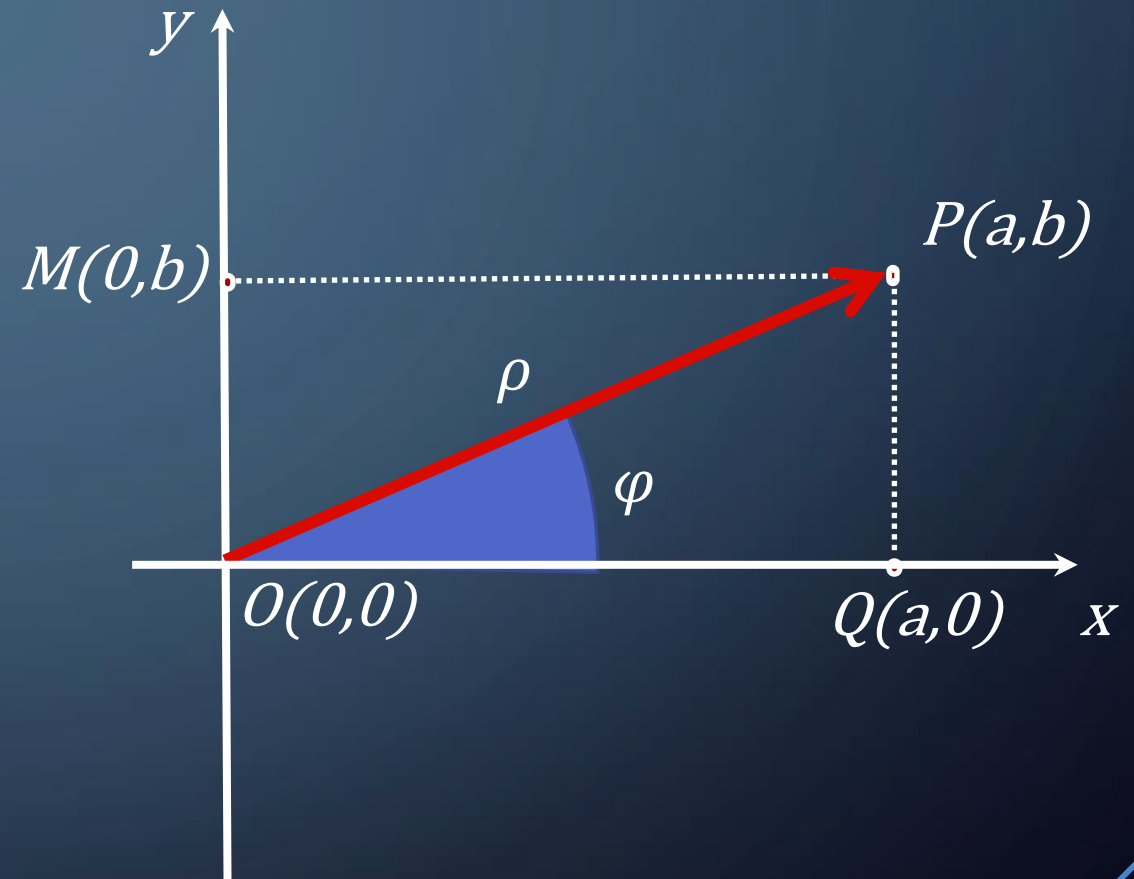
$$a = \rho * \cos(\varphi)$$

$$b = \rho * \sin(\varphi)$$

- È dunque possibile scrivere
 $a + ib = \rho * \cos(\varphi) + i * \rho * \sin(\varphi)$
da cui si ricava

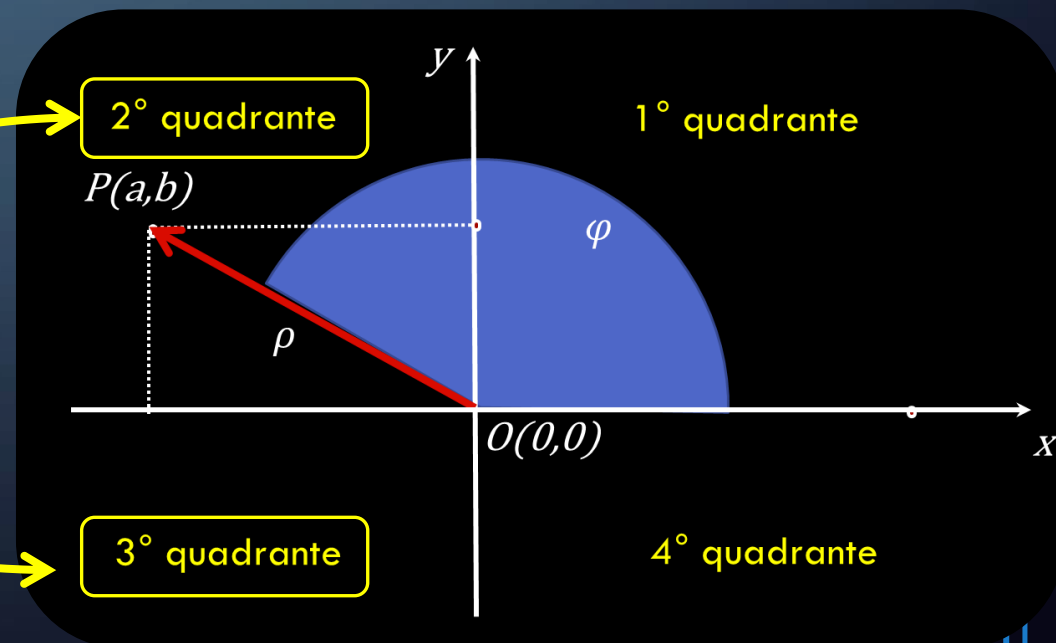
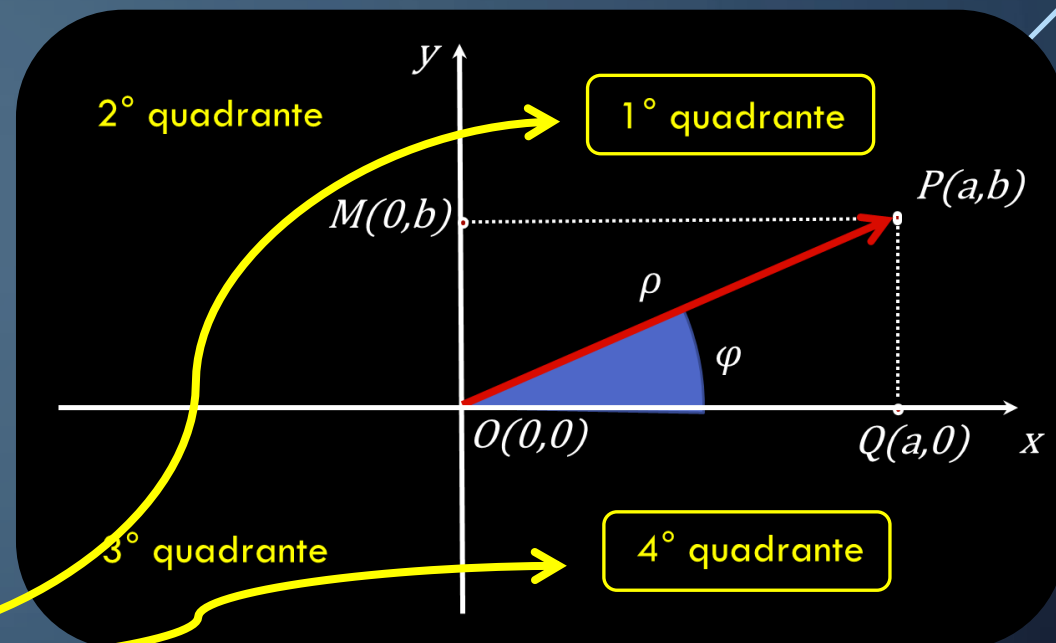
$$a + ib = \rho(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$

detta FORMA TRIGONOMETRICA DEL
NUMERO COMPLESSO



FORMA TRIGONOMETRICA

- ρ è un numero positivo ed è nullo solo se $a=b=0$ e $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
- φ è un angolo compreso tra -180° e 180° (in radianti tra $-\pi$ e π)
- $\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ se il numero complesso si trova nel 1° o 4° quadrante
- $\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ se il numero complesso si trova nel 2° quadrante
- $\varphi = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$ se il numero complesso si trova nel 3° quadrante



ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica del numero complesso $z = -1 + \sqrt{3}i$

ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica del numero complesso $z = -1 + \sqrt{3}i$

Modulo $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

Argomento (siamo nel 2° quadrante)

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

Forma trigonometrica

$$z = 2 \left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right]$$

ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica del numero complesso $z=2i$

ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica del numero complesso $z=2i$

Modulo $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Argomento (il numero è immaginario puro positivo)

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Forma trigonometrica

$$z = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica dei numeri complessi $z_1 = \sqrt{3} + i$ $z_2 = \sqrt{3} - i$

ESERCIZIO

Trovare la forma trigonometrica dei numeri complessi $z_1 = \sqrt{3} + i$ $z_2 = \sqrt{3} - i$

z_1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

z_2

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

ESERCIZIO

Trasformare in forma algebrica il numero complesso

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ESERCIZIO

Trasformare in forma algebrica il numero complesso

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Le formule di trasformazione in coordinate cartesiane sono:

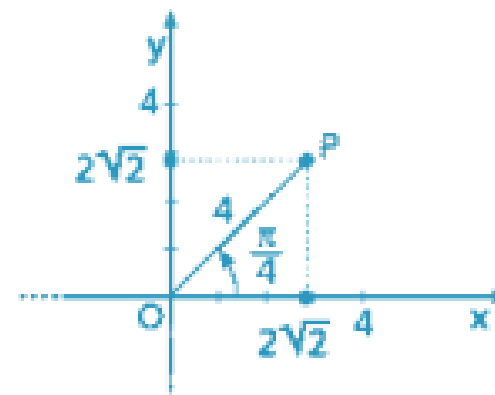
$$\begin{cases} x_p = r \cos \alpha \\ y_p = r \sin \alpha \end{cases}$$

Pertanto

$$x_p = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

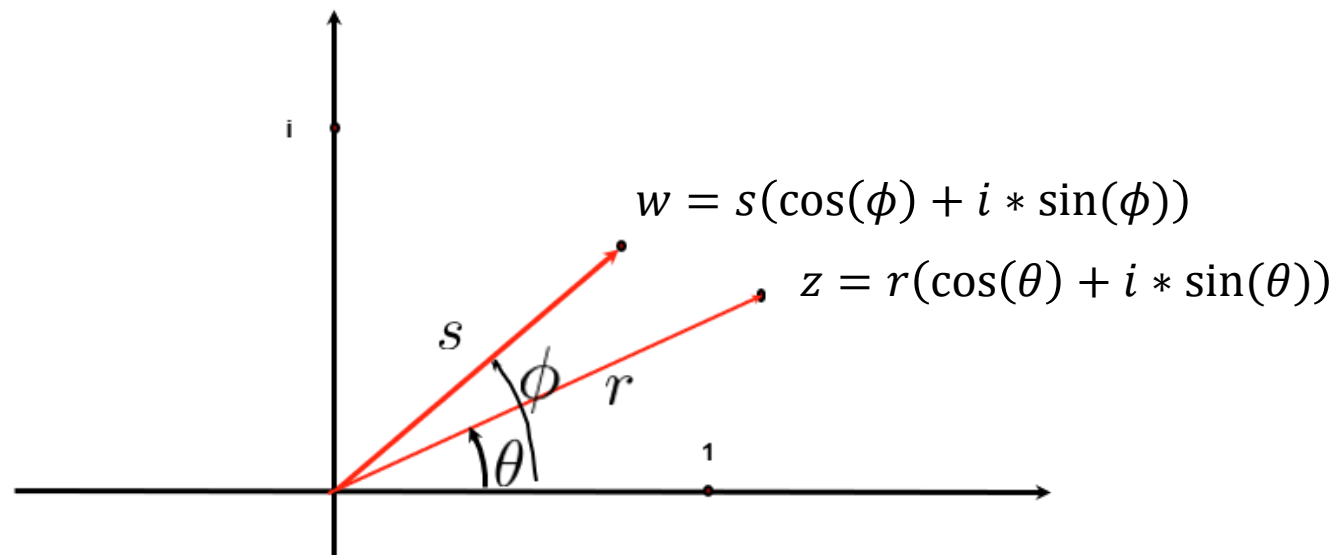
$$y_p = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$



PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

- Si usa la forma trigonometrica



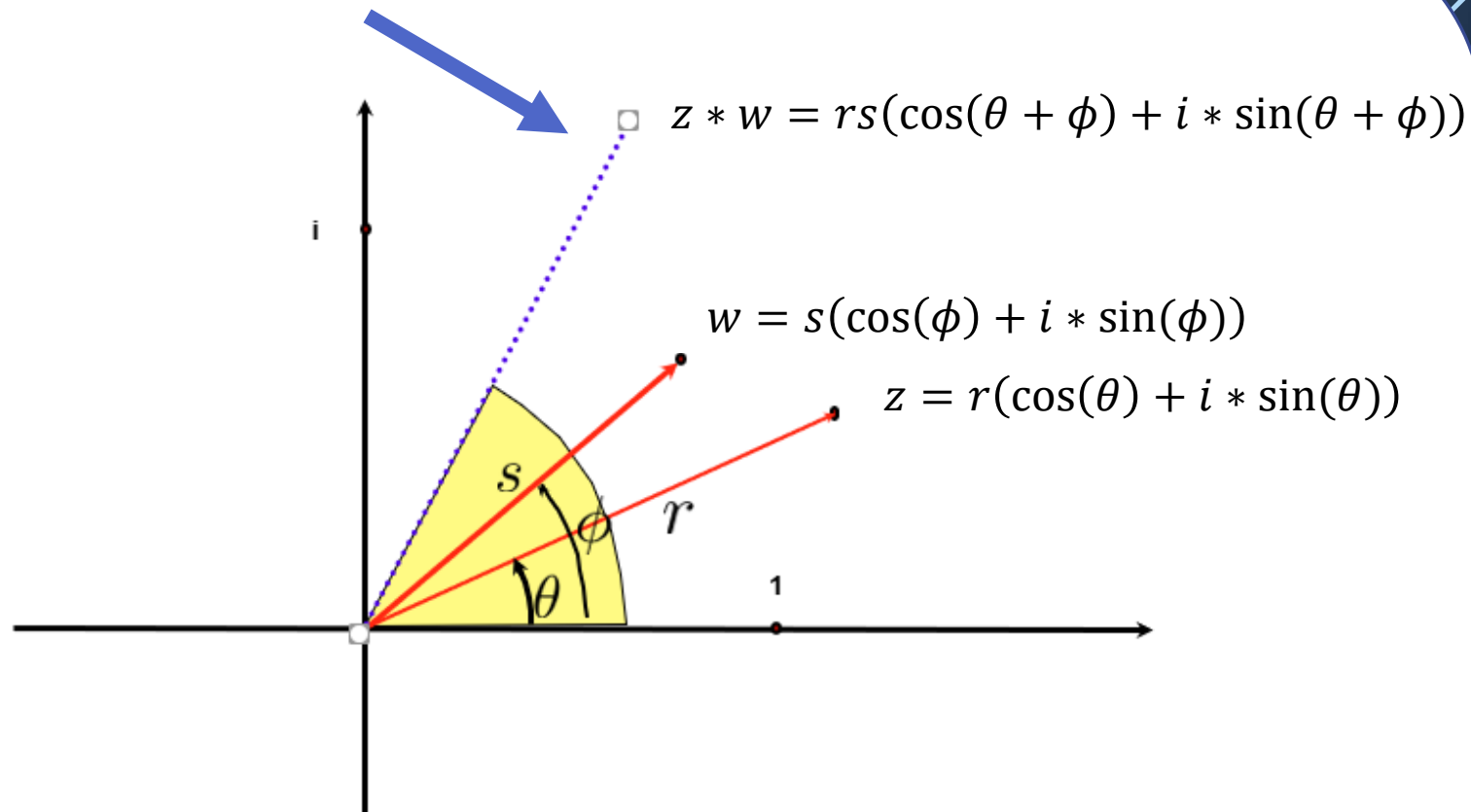
$$\begin{aligned} z * w &= (r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))) * (s (\cos(\phi) + i \sin(\phi))) \\ &= rs (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \\ &= rs (\cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi)) + i (\sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi)) \end{aligned}$$

Ne discende per le formule di addizione di seno e coseno:

$$z * w = rs(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$$

PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

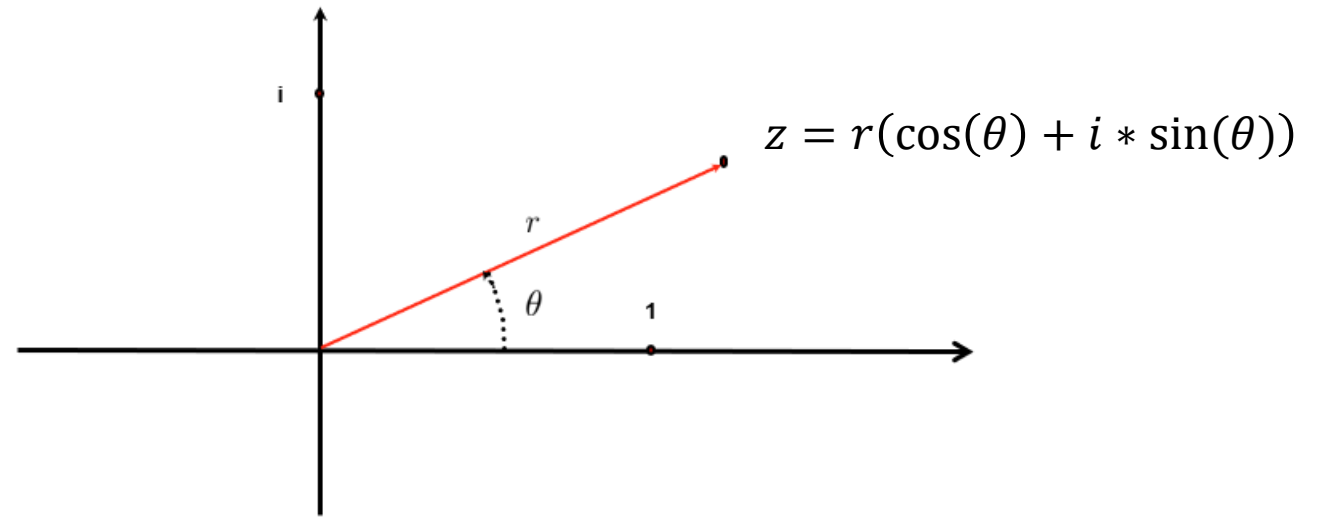
- Si usa la forma trigonometrica



$$z * w = rs(\cos(\theta + \phi) + i * \sin(\theta + \phi))$$

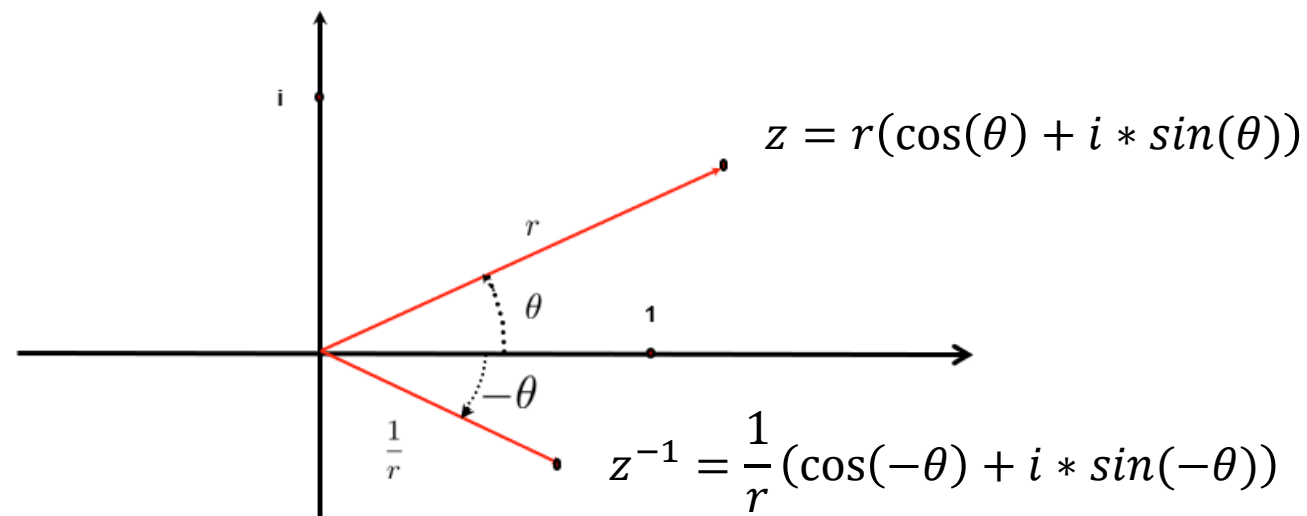
RECIPROCO DI UN NUMERO COMPLESSO

- Si usa la forma trigonometrica



RECIPROCO DI UN NUMERO COMPLESSO

- Si usa la forma trigonometrica



$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i * \sin(-\theta))$$

In questo modo infatti $z * z^{-1} = 1$

DIVISIONE DI NUMERI COMPLESSI

- Si usa nuovamente la forma trigonometrica e non si fa altro che moltiplicare il primo numero complesso per il reciproco del secondo numero complesso
- Siano $z = r(\cos(\theta) + i * \sin(\theta))$ e $w = s(\cos(\phi) + i * \sin(\phi))$
- Si ottiene $\frac{z}{w} = z * \frac{1}{w} = r(\cos(\theta) + i * \sin(\theta)) * \frac{1}{s}(\cos(-\phi) + i * \sin(-\phi))$
- Quindi

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i * \sin(\theta - \phi))$$

ESERCIZIO

Calcoliamo il prodotto dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3} \pi \right) \text{ e } z_2 = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{6} \pi \right).$$

ESERCIZIO

Calcoliamo il prodotto dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3} \pi \right) \text{ e } z_2 = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \operatorname{sen} \frac{5}{6} \pi \right).$$

Ricordiamo che, se $z_1 = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $z_2 = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = rs [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)],$$

quindi, essendo $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3} \pi$, $\beta = \frac{5}{6} \pi$, si ha:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \left[\cos \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{5}{6} \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{5}{6} \pi \right) \right] = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{3}{2} \pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2} \pi \right).$$

Poiché $\cos \frac{3}{2} \pi = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{3}{2} \pi = -1$, sostituendo:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{3} [0 + i(-1)] = -\frac{1}{3} i.$$

RIASSUMENDO

- È più conveniente eseguire la somma e la sottrazione dei numeri complessi utilizzando la forma algebrica

$$z = a + ib$$

$$w = c - id$$

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

$$z - w = (a - c) + i(b - d)$$

- È più conveniente eseguire il prodotto e la divisione di due numeri complessi utilizzando la forma trigonometrica

$$z = r(\cos(\theta) + i * \sin(\theta))$$

$$w = s(\cos(\phi) + i * \sin(\phi))$$

$$z * w = rs(\cos(\theta + \phi) + i * \sin(\theta + \phi))$$

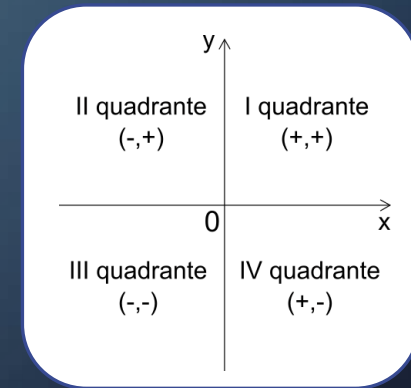
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i * \sin(\theta - \phi))$$

RIASSUMENDO

- Passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = a + ib \rightarrow \begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & 1^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & 2^\circ \text{ quadrante} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & 3^\circ \text{ quadrante} \end{cases} \rightarrow z = \rho(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$



- Passaggio da coordinate polari a cartesiane

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)) \rightarrow \begin{aligned} a &= \rho * \cos(\varphi) \\ b &= \rho * \sin(\varphi) \end{aligned} \rightarrow z = a + ib$$

FORMA CONTRATTA PER LA FORMA POLARE

Se considera la forma polare di un numero complesso

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$

ci si accorge che le due grandezze caratterizzanti sono il modulo ρ e la fase φ , per questo motivo si tende ad utilizzare una scrittura contratta chiamata ancora FORMA POLARE

$$z = \rho \angle \varphi$$

in questo caso il prodotto e la divisione tra numeri complessi viene espressa nella forma

$$z = r \angle \theta$$

$$w = s \angle \phi$$

$$z * w = rs \angle (\theta + \phi)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \angle (\theta - \phi)$$

ESERCIZIO

Siano dati

$$z_1 = 2\angle 30^\circ \quad z_2 = 3\angle 15^\circ$$

Calcolare prodotto e divisione tra i due

ESERCIZIO

Siano dati

$$z_1 = 2\angle 30 \quad z_2 = 3\angle 15$$

Calcolare prodotto e divisione tra i due

$$z_1 \cdot z_2 = 6\angle 45$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\angle 15$$

SEGNALI SINUSOIDALI E VETTORI

- Si consideri una circonferenza di raggio 1 e su di essa un vettore che ruota con velocità angolare ω
- Si consideri inoltre la sua proiezione sull'asse verticale

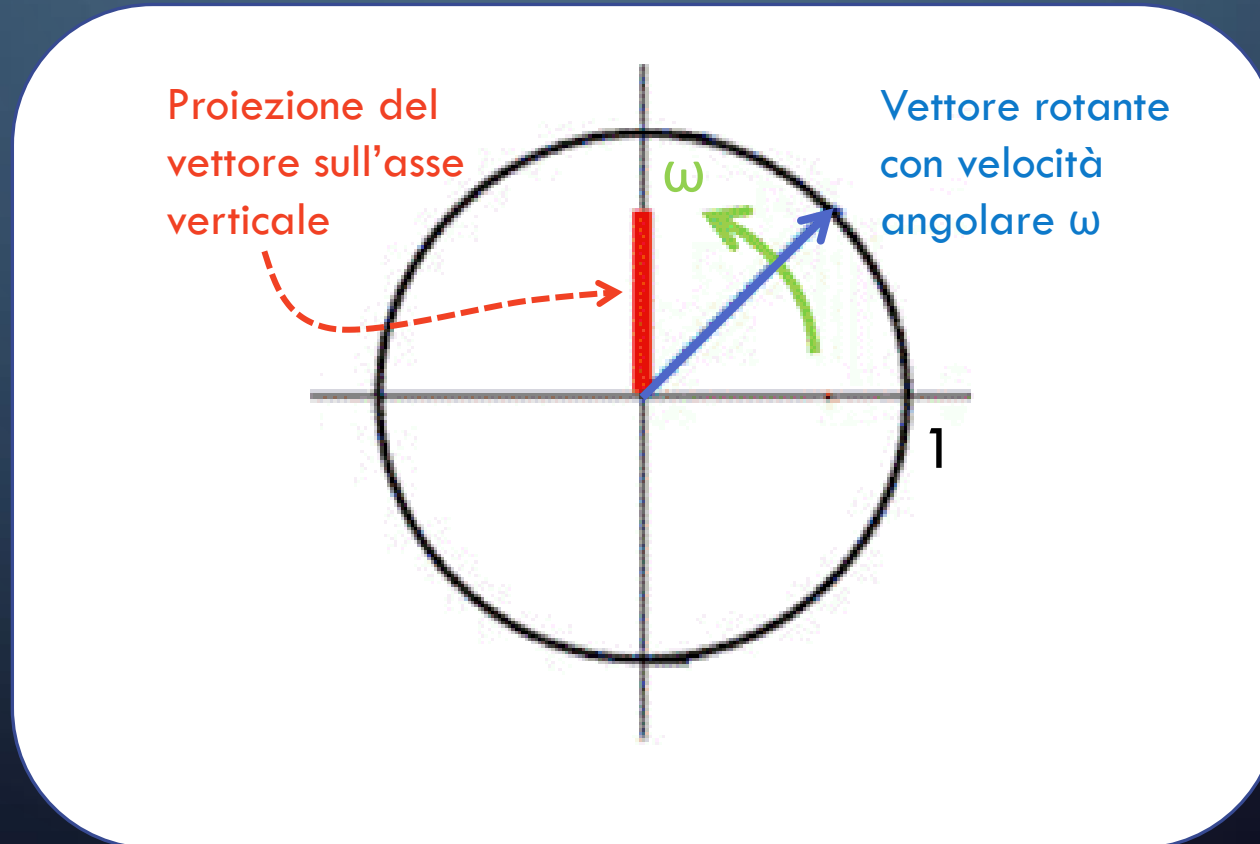




image016.jpg

SEGNALI SINUSOIDALI E VETTORI

- Si disegnino ora su un grafico cartesiano in modo continuo i valori della proiezione al variare del tempo
- Quello che si ottiene è il grafico della funzione $y = \sin(\omega t)$
- È evidente quindi che alla funzione $\sin(\omega t)$ è associabile un vettore che ruota con velocità angolare ω

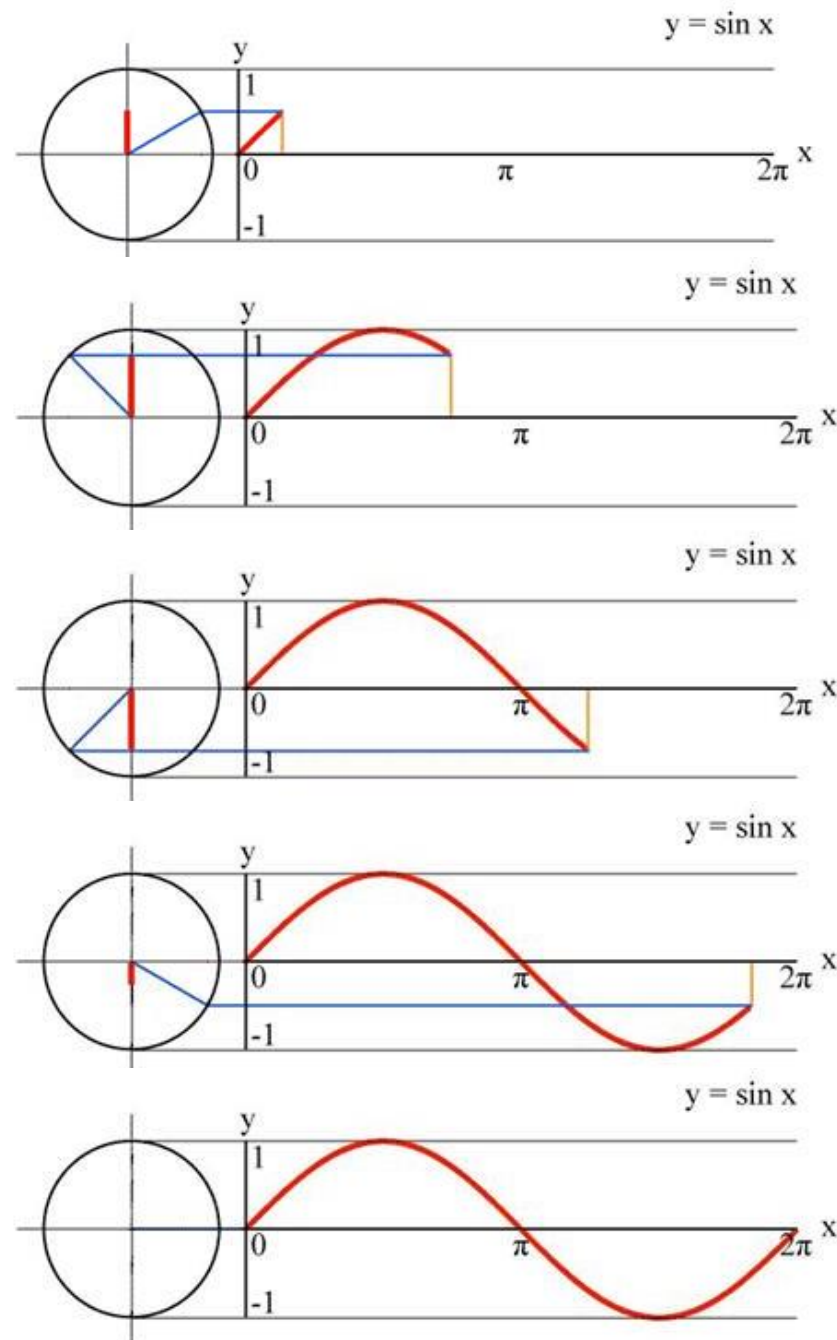
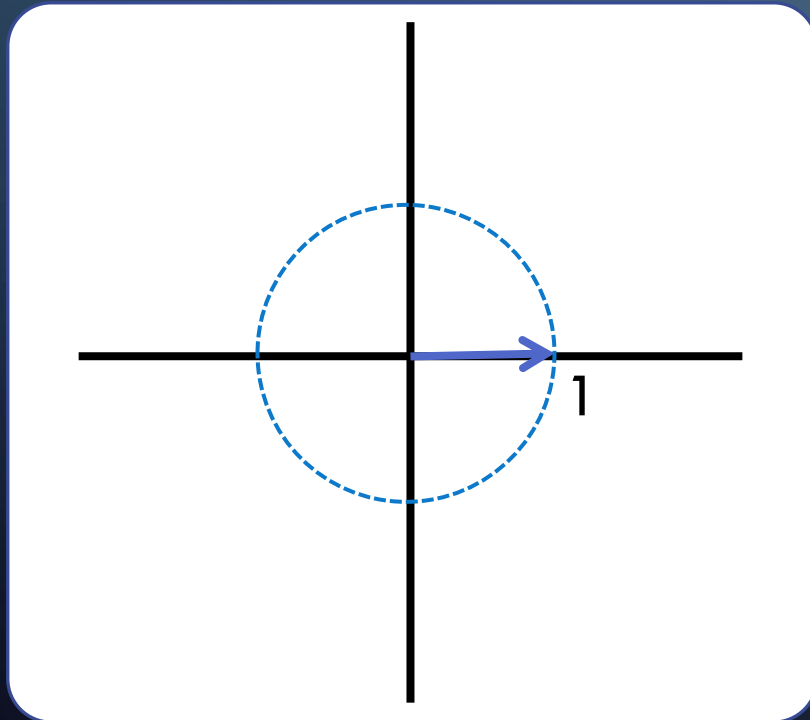




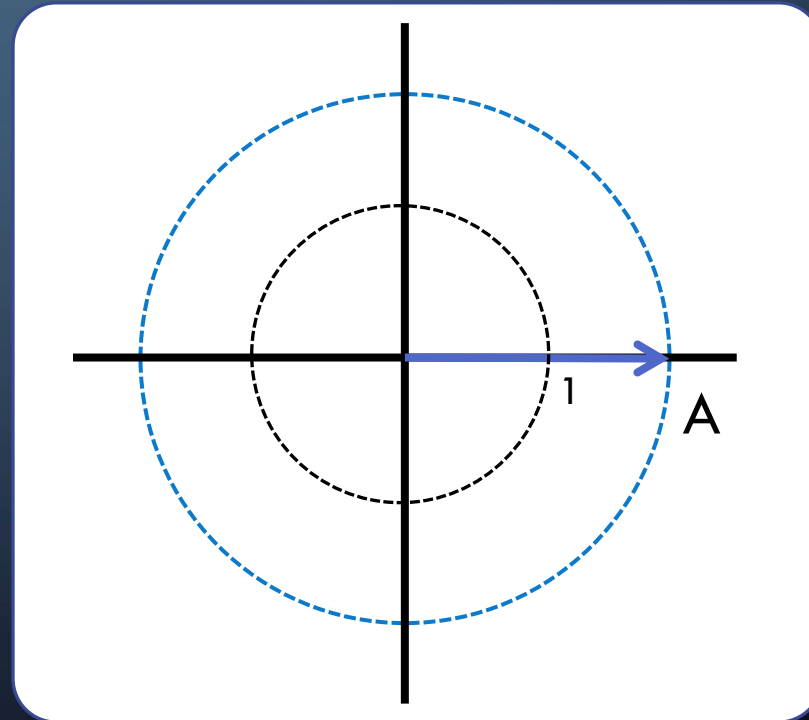
image016.jpg

SEGNALI SINUSOIDALI E VETTORI

- In particolare questo vettore è un vettore di lunghezza 1 che ha fase 0



- Se si ha invece la funzione
$$y = A * \sin(\omega t)$$
il vettore associato è quello con modulo A e fase 0



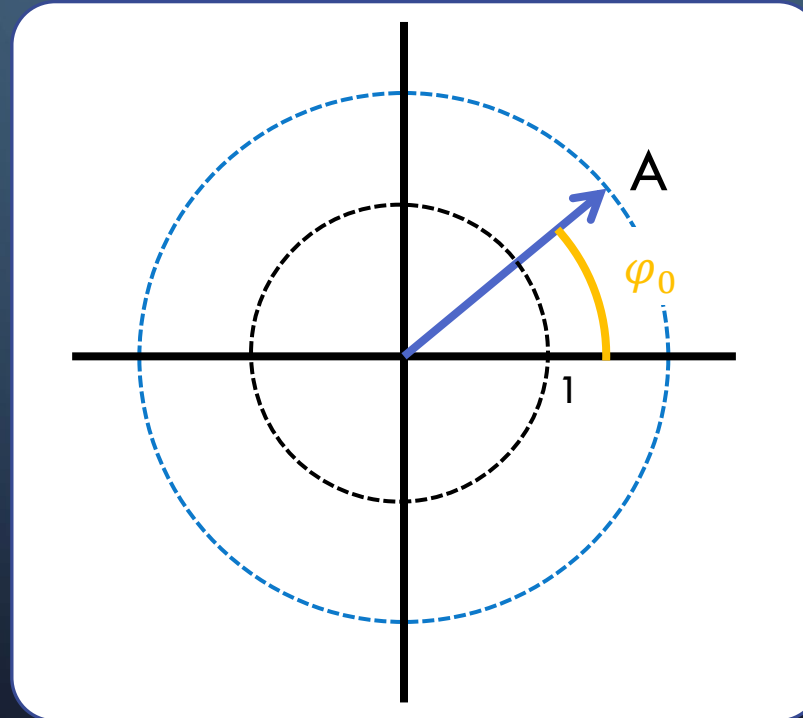


SEGNALI SINUSOIDALI E VETTORI

- Quando la fase iniziale è $\varphi_0 \neq 0$, la funzione è del tipo

$$y = A * \sin(\omega t + \varphi_0)$$

e il vettore associato è quello con modulo A e fase φ_0



SEGNALI SINUSOIDALI E VETTORI

- Si conclude quindi che la rappresentazione trigonometrica di un segnale sinusoidale $y = A * \sin(\omega t + \varphi_0)$ può essere sostituita da un vettore (fermo) dove:
 - La lunghezza del vettore (modulo) rappresenta l'ampiezza della sinusoide
 - La fase del vettore corrisponde con la fase iniziale della sinusoide
- Si nota che la velocità angolare ω resta sottointesa e determina la velocità di rotazione del vettore stesso
- Dai valori di A , φ_0 e ω è possibile determinare istante per istante l'andamento nel tempo della sinusoide

FASORI

- Un FASORE non è altro che l'associazione di un segnale sinusoidale ad un vettore che lo rappresenta, come si è appena visto. In altre parole al segnale sinusoidale $y = A * \sin(\omega t + \varphi_0)$ si associa il fasore

$$\vec{y} = A \angle \varphi_0$$

dove il simbolo di vettore ricorda che la grandezza è un fasore

- Si osserva anche che una volta associato il fasore, questo è in corrispondenza biunivoca con un numero complesso, quindi è possibile utilizzare le formule di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione viste per i numeri complessi anche alle rappresentazioni fasoriali

ESERCIZIO

Rappresentare in forma fasoriale

$$v(t) = 100 \sin\left(314t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

ESERCIZIO

Rappresentare in forma fasoriale

$$v(t) = 100 \sin\left(314t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\vec{v} = 100 \angle -\frac{3}{4}\pi$$

ESERCIZIO

Eseguire la somma dei seguenti fasori

$$\vec{V}_1 = 20 \angle 30^\circ$$

$$\vec{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$$

ESERCIZIO

Eseguire la somma dei seguenti fasori

$$\vec{V}_1 = 20 \angle 30^\circ$$

$$\vec{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$$

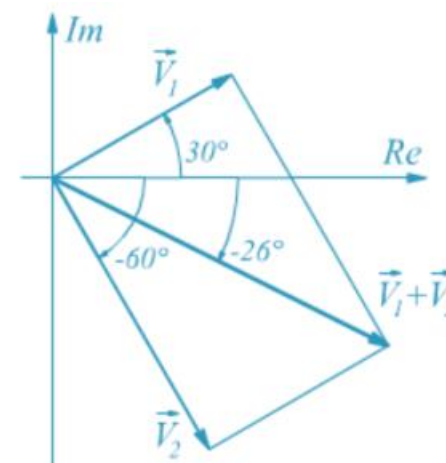
$$\vec{V}_1 = 20(\cos \phi_1 + j \sin \phi_1) = 20(0,866 + j0,5) = 17,32 + j10$$

$$\vec{V}_2 = 30(\cos \phi_2 + j \sin \phi_2) = 30(0,5 - j0,866) = 15 - j26$$

$$\vec{V}_s = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 17,32 + j10 + 15 - j26 = 32,32 - j16$$

$$|V_s| = \sqrt{32,32^2 + 16^2} = 36 \quad \angle V_s = \phi_s = \operatorname{atg}\left(\frac{-16}{32,32}\right) = -26^\circ$$

$$\vec{V}_s = 36 \angle -26^\circ$$



ESERCIZIO

Eseguire la differenza dei seguenti fasori

$$\vec{V}_1 = 20 \angle 30^\circ$$

$$\vec{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$$

ESERCIZIO

Eseguire la differenza dei seguenti fasori

$$\vec{V}_1 = 20 \angle 30^\circ$$

$$\vec{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$$

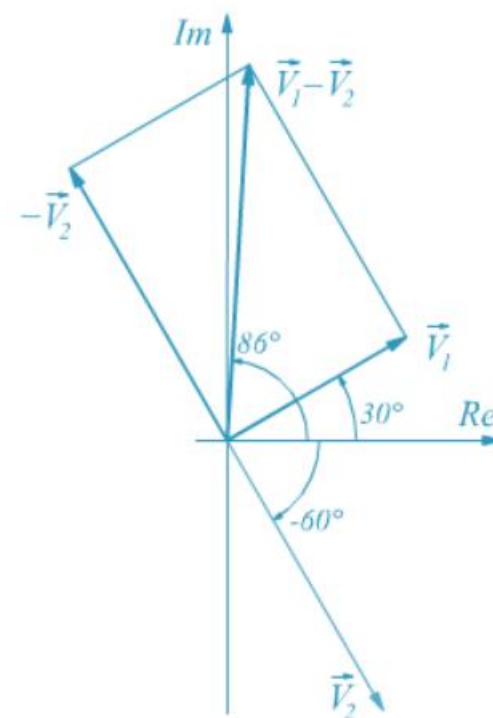
$$\vec{V}_1 = 20(\cos \phi_1 + j \sin \phi_1) = 20(0,866 + j0,5) = 17,32 + j10$$

$$\vec{V}_2 = 30(\cos \phi_2 + j \sin \phi_2) = 30(0,5 - j0,866) = 15 - j26$$

$$\vec{V}_d = 17,32 + j10 - 15 + j26 = 2,32 + j36$$

$$|V_d| = \sqrt{2,32^2 + 36^2} = 36 \quad \angle V_d = \phi_d = \operatorname{atg}\left(\frac{36}{2,32}\right) = 86^\circ$$

$$\vec{V}_d = 36 \angle 86^\circ$$



ESERCIZIO

Determinare i fasori dei seguenti numeri complessi e calcolarne il prodotto

$$\begin{cases} A = 3 + 2i \\ B = 2 + i \end{cases}$$

ESERCIZIO

Determinare i fasori dei seguenti numeri complessi e calcolarne il prodotto

$$\begin{cases} A = 3 + 2i \\ B = 2 + i \end{cases}$$

$$|A| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,61 \quad \theta = \operatorname{atg}\left(\frac{2}{3}\right) = 33,7^\circ$$

$$\vec{A} = 3.61 \angle 33.7^\circ$$

$$|B| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2,24 \quad \phi = \operatorname{atg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,6^\circ$$

$$\vec{B} = 2.24 \angle 26.6^\circ$$

$$\vec{AB} = (3.61 * 2.24) \angle (33.7^\circ + 26.6^\circ) = 8.08 \angle 60.3^\circ$$

ESERCIZIO

Determinare i fasori dei seguenti numeri complessi e calcolarne il rapporto

$$\begin{cases} A = 2 + 3i \\ B = 2 - 3i \end{cases}$$

ESERCIZIO

Determinare i fasori dei seguenti numeri complessi e calcolarne il rapporto

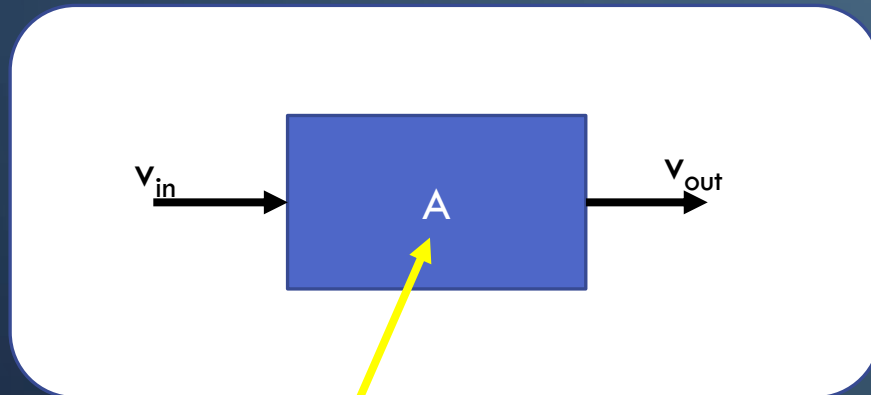
$$\begin{cases} A = 2 + 3i \\ B = 2 - 3i \end{cases}$$

$$|A| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,61 \quad \theta = \operatorname{atg}\left(\frac{3}{2}\right) = 56,3^\circ \quad \vec{A} = 3.61 \angle 56.3^\circ$$

$$|B| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,61 \quad \phi = \operatorname{atg}\left(\frac{-3}{2}\right) = -56,3^\circ \quad \vec{B} = 3.61 \angle -56.3^\circ$$

$$\overrightarrow{A/B} = \left(\frac{3.61}{3.61} \right) \angle (56.3^\circ - (-56.3^\circ)) = 1 \angle 112.6^\circ$$

SCHEMI A BLOCCHI



Funzione di
trasferimento

Il disegno di figura rappresenta uno schema a blocchi.

Negli schemi a blocchi si ha sempre che il legame tra ingresso e uscita è

$$v_{out} = A * v_{in}$$

Possono essere usati per modellare sistemi complessi a patto che il legame tra ingresso e uscita sia esprimibile con la relazione $v_{out} = A * v_{in}$

GRANDEZZE SINUSOIDALI E SISTEMI

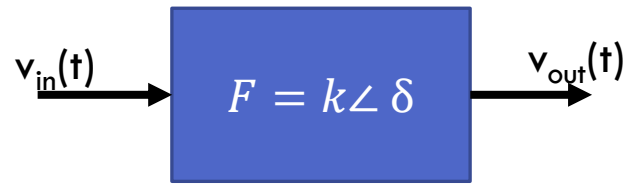


- Supponiamo di avere in ingresso ad un sistema il segnale sinusoidale

$$v_{in}(t) = A * \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- Il comportamento del sistema sia di modificare modulo e fase della sinusoide in ingresso delle quantità k (per il modulo) e δ (per la fase).
- Viene chiesto di determinare l'uscita $v_{out}(t)$

GRANDEZZE SINUSOIDALI E SISTEMI

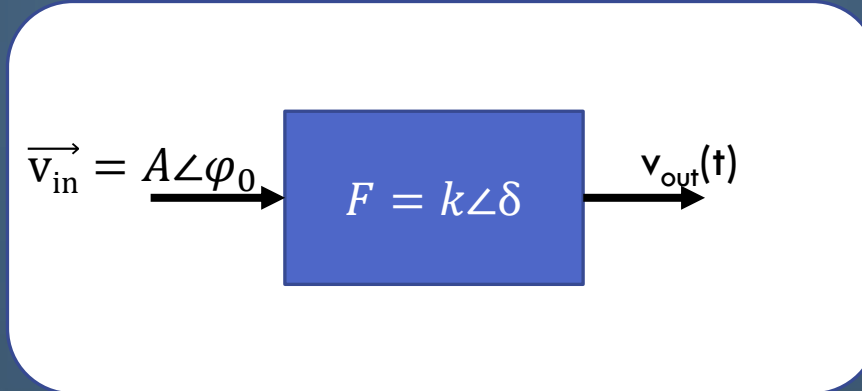


- Nel caso in questione è possibile utilizzare il modello degli schemi a blocchi a patto di utilizzare per il blocco la funzione di trasferimento (è un numero complesso)

$$F = k\angle\delta$$

- Di conseguenza il prodotto che dovremo calcolare sarà tra il fasore che rappresenta $v_{in}(t)$ e il numero complesso F

GRANDEZZE SINUSOIDALI E SISTEMI



- $v_{in}(t) = A * \sin(\omega t + \varphi_0)$ diventa

$$\vec{v}_{in} = A\angle\varphi_0$$

- Il fasore rappresentativo di $\vec{v}_{out}$ sarà quindi

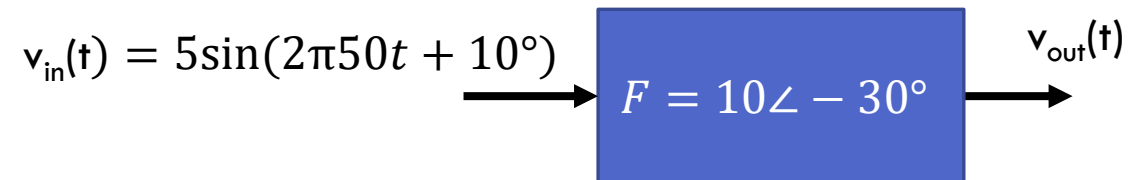
$$\vec{v}_{out} = F * \vec{v}_{in} = (k\angle\delta) * (A\angle\varphi_0) = (k * A)\angle(\varphi_0 + \delta)$$

- Di conseguenza

$$v_{out}(t) = kA * \sin(\omega t + (\varphi_0 + \delta))$$

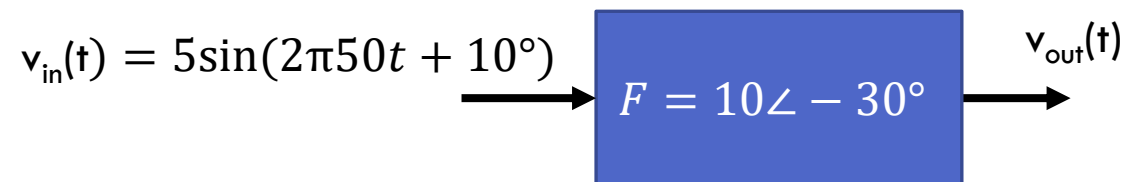
ESERCIZIO

Determinare l'uscita $v_{\text{out}}(t)$ del sistema di figura



ESERCIZIO

Determinare l'uscita $v_{out}(t)$ del sistema di figura



$$\overrightarrow{v_{in}} = 5\angle 10^\circ$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{out}} = F * \overrightarrow{v_{in}} &= (10\angle -30^\circ) * (5\angle 10^\circ) = \\ &= (10 * 5)\angle(10^\circ - 30^\circ) = 50\angle -20^\circ\end{aligned}$$

$$v_{out}(t) = 50 * \sin(2\pi 50t - 20^\circ)$$

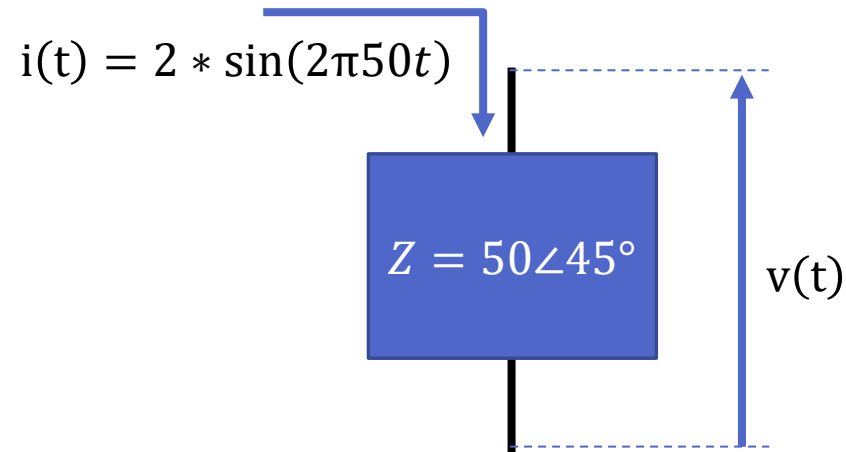
ESERCIZIO

- Un sistema elettronico è attraversato da una corrente sinusoidale $i(t) = 2 * \sin(2\pi 50t)$
- Sapendo che la relazione tra i fasori di tensione e corrente nei sistemi elettronici è sempre

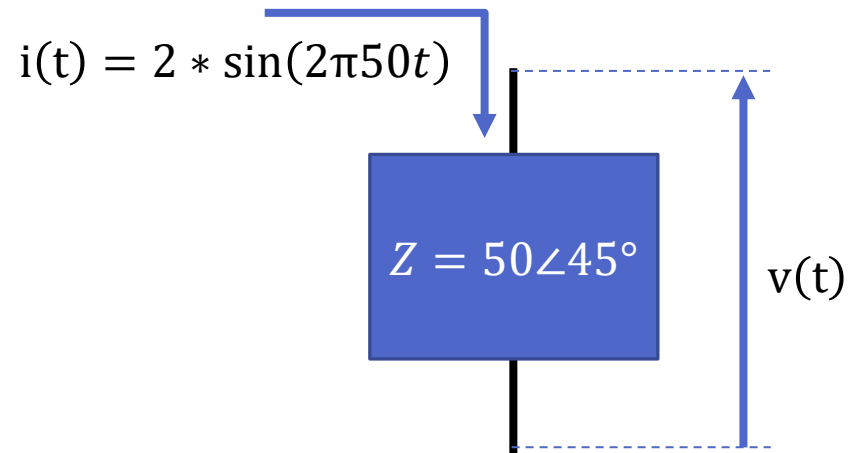
$$\vec{v} = Z * \vec{i} \quad (\text{legge di Ohm})$$

dove Z prende il nome impedenza del sistema

- Calcolare la tensione ai suoi capi se $Z = 50\angle 45^\circ$



ESERCIZIO



$$\vec{i} = 2 \angle 0$$

$$\vec{v} = Z * \vec{i} = (50 \angle 45^\circ) * (2 \angle 0^\circ) = (50 * 2) \angle (45^\circ + 0^\circ) = 100 \angle 45^\circ$$

$$v(t) = 100 * \sin(2\pi 50t + 45^\circ)$$

ESERCIZIO

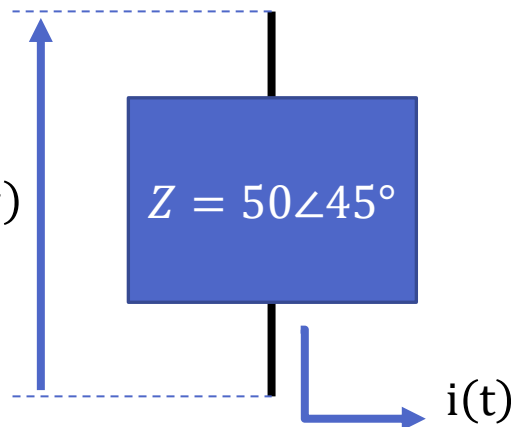
- Un sistema elettronico ha ai suoi capi una tensione sinusoidale $v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t)$
- Sapendo che la relazione tra i fasori di tensione e corrente nei sistemi elettronici è sempre

$$\vec{v} = Z * \vec{i} \quad (\text{legge di Ohm})$$

dove Z prende il nome impedenza del sistema

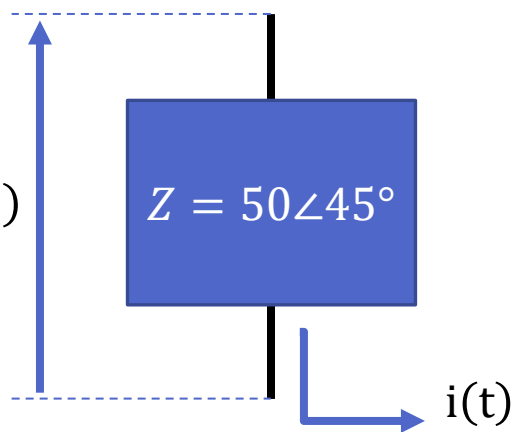
- Calcolare la corrente che vi circola se $Z = 50\angle 45^\circ$

$$v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t)$$



ESERCIZIO

$$v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t)$$



$$\vec{v} = 311 \angle 0^\circ$$

$$\vec{v} = Z * \vec{i} \quad \text{quindi} \quad \vec{i} = \frac{\vec{v}}{Z} = \left(\frac{311}{50}\right) \angle (0^\circ - (45^\circ)) = 6.22 \angle -45^\circ$$

$$i(t) = 6.22 * \sin(2\pi 50t - 45^\circ)$$

ESERCIZIO

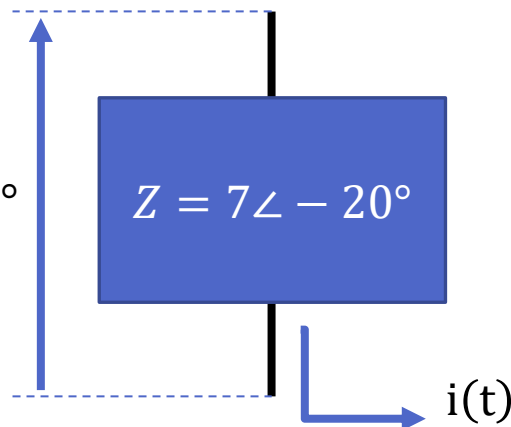
- Un sistema elettronico ha ai suoi capi una tensione sinusoidale $v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t + 30^\circ)$
- Sapendo che la relazione tra i fasori di tensione e corrente nei sistemi elettronici è sempre

$$\vec{v} = Z * \vec{i} \quad (\text{legge di Ohm})$$

dove Z prende il nome impedenza del sistema

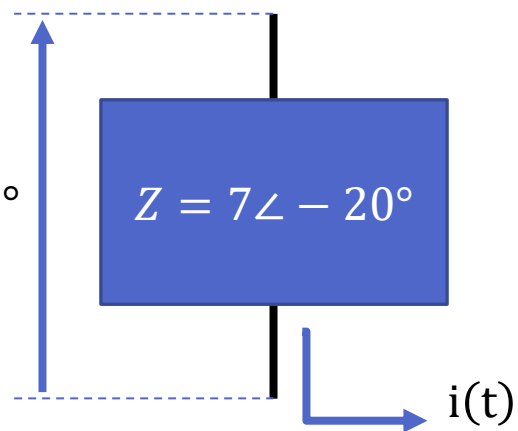
- Calcolare la corrente che vi circola se $Z = 7 \angle -20^\circ$

$$v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t) + 30^\circ$$



ESERCIZIO

$$v(t) = 311 * \sin(2\pi 50t) + 30^\circ$$



$$\vec{v} = 311 \angle 30^\circ$$

$$\vec{v} = Z * \vec{i} \quad \text{quindi} \quad \vec{i} = \frac{\vec{v}}{Z} = \left(\frac{311}{7}\right) \angle (30^\circ - (-20^\circ)) = 44.43 \angle 50^\circ$$

$$i(t) = 44.43 * \sin(2\pi 50t + 50^\circ)$$