Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}$$

Soluzione

Suggerimento: utilizzare l'Help Center di Matlab alla pagina https://it.mathworks.com/help/symbolic/computational-mathematics-in-symbolic-math-toolbox.html

```
syms f(x) x
f(x) = x^3/(x^2-16)
```

```
f(x) =
```

$$\frac{x^3}{-16 + x^2}$$

Dominio: il denominatore deve essere diverso da zero:

```
syms x
solve(x^2-16==0, x)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

il dominio è quindi: $D \equiv \Re \backslash \{-4, 4\}$

Zeri:

```
solve(f(x) == 0)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione: ci sono 3 soluzioni $x = 0$ perché lo zero è triplo.

Limiti e asintoti:

Limite per $x \to +\infty$

```
limit(f(x), x, +Inf)
```

```
ans = ∞
```

Quindi ci potrebbe essere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$. Ricerchiamo m:

```
m = limit(f(x)/x, x, Inf)
```

```
m = 1
```

Quindi per $x \to +\infty$ c'è un asintoto obliquo, cerchiamo $q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m\,x]$:

```
q = limit(f(x)-m*x, x, Inf)
```

```
q = 0
```

Quindi per $x \to +\infty$ c'è un asintoto obliquo con equazione $y = x$.

Limite per $x \to -\infty$

```
limit(f(x), x, -Inf)
```

```
ans = -∞
```

Quindi ci potrebbe essere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$. Ricerchiamo m:

```
m = limit(f(x)/x, x, -Inf)
```

```
m = 1
```

Quindi per $x \to -\infty$ c'è un asintoto obliquo, cerchiamo $q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m\,x]$:

```
q = limit(f(x)-m*x, x, -Inf)
```

```
q = 0
```

Quindi per $x \to -\infty$ c'è un asintoto obliquo con equazione $y = x$.

Limiti dx e sx per $x \to 4$. Limite sinistro

```
limit(f(x), x, 4,'Left')
```

```
ans = -∞
```

limite destro

```
limit(f(x), x, 4,'Right')
```

```
ans = ∞
```

Limiti dx e sx per $x \to -4$. Limite sinistro

```
limit(f(x), x, -4,'Left')
```

```
ans = -∞
```

limite destro

```
limit(f(x), x, -4,'Right')
```

```
ans = ∞
```

Derivata prima:

```
f1(x) = diff(f(x), x)
```

```
f1(x) =
```

$$\frac{3\,x^2}{-16+x^2}-\frac{2\,x^4}{(-16+x^2)^2}$$

```
f1(x) = simplify(f1(x))
```

```
f1(x) =
```

$$\frac{x^2\,(-48+x^2)}{(-16+x^2)^2}$$

il segno dipende solo dal termine (x^2-48) che è maggiore di 0 per valori esterni e quindi $x<-\sqrt{48}$ e $x>\sqrt{48}$ dove $\sqrt{48}\simeq$

```
sqrt(48)
```

```
ans = 6.9282
```

quindi la funzione cresce per $x<-\sqrt{48}$, decresce per $-\sqrt{48}<x<\sqrt{48}$ e torna a crescere per $x>\sqrt{48}$

Derivata seconda:

```
f2(x) = diff(f1(x), x)
```

```
f2(x) =
```

$$\frac{2\,x^3}{(-16+x^2)^2}-\frac{4\,x^3\,(-48+x^2)}{(-16+x^2)^3}+\frac{2\,x\,(-48+x^2)}{(-16+x^2)^2}$$

```
f2(x) = simplify(f2(x))
```

```
f2(x) =
```

$$\frac{32\,x\,(48+x^2)}{(-16+x^2)^3}$$

È necessario valutare i segni di x, (x^2+48) e $(x^2-16)^3$:

$x>0$ per $x>0$

$(x^2+48)>0$ sempre

$(x^2-16)^3$ ha lo stesso segno di (x^2-16) e quindi (x^2-16)>0 per valori esterni, ovvero per $x<-4$ e $x>4$

di conseguenza la funzione è

concava per $x < -4$ e $0 < x < 4$

convessa per $-4 < x < 0$ e $x > 4$

Grafico:

```
fplot(f(x), [-30 30])
hold on
fplot(x, [-30 30], '--')
grid on
```