MATRICI E SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

MODULO 2.0: STRUMENTI MATEMATICI

FONTI

- https://slideplayer.it/slide/537101/
- Estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi (Zanichelli)
- https://online.scuola.zanichelli.it/bergamini-files/Biennio/Capitoli/BLU/bergamini_capitolo_10_blu.pdf

DEFINIZIONE DI MATRICE

- Dati $m*n$ numeri, la tabella che li ordina in m righe e n colonne viene detta matrice

Colonne

N.B. Si usa il «**grassetto**» per indicare una matrice

$$\boldsymbol{A(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Righe

- Una matrice è rettangolare se il numero di righe "m" è diverso dal numero di colone "n"
- Se m = n la matrice si dice quadrata di ordine m

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrice rettangolare 3 X 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice quadrata di ordine 3

FORMA SINTETICA

- Una matrice può essere rappresentata in forma sintetica con:

$$\mathbf{A\ (m, n)} = [a_{ij}], \quad (i = 1, 2, \ldots\ m;\ j = 1, 2, \ldots\ n)$$

DEFINIZIONE DI VETTORE

- Un vettore riga è una matrice con una sola riga

$$\boldsymbol{A(1,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

- Un vettore colonna è una matrice con una sola colonna

$$\boldsymbol{A(m,1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{j1} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

DIAGONALE PRINCIPALE E DIAGONALE SECONDARIA

- La matrice deve essere QUADRATA
- la linea che unisce gli elementi con pedici uguali, viene chiamata DIAGONALE PRINCIPALE .
- La linea che unisce i vertici Nord-Est e Sud-Ovest viene denominata DIAGONALE SECONDARIA.

Diagonale principale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonale secondaria

MATRICE SIMMETRICA E MATRICE DIAGONALE

- Una matrice QUADRATA si dice simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2,\dots n)$
- Una matrice QUADRATA si dice diagonale se

$$a_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

$$a_{ij} = d_i \quad \text{se} \quad i = j$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice simmetrica 3x3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale 4x4

MATRICE IDENTITÀ

- La matrice identità è una particolare matrice scalare nella quale gli elementi della diagonale principale sono uguali ad 1
- Viene indicata anche con la lettera I maiuscola
- La matrice identità gioca nell'algebra delle matrici lo stesso ruolo del numero 1 nell'algebra dei numeri.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice identità 3x3

MATRICE NULLA

- La matrice (quadrata o rettangolare) che contiene solo elementi nulli viene denominata matrice nulla
- viene indicata con la lettera $\boldsymbol{O}$ maiuscola
- La matrice nulla gioca nell'algebra delle matrici lo stesso ruolo del numero 0 nell'algebra dei numeri

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice nulla 3x3

ESERCIZIO

- Dire se le matrici seguenti sono: vettori, quadrate, simmetriche, identità, nulle

1
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 8 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5
$$\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

9
$$\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x \end{bmatrix}.$$

10
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

SOMMA (E DIFFERENZA) TRA MATRICI

- Date due matrici, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, che hanno le stesse dimensioni, si definisce matrice somma la matrice avente le stesse dimensioni di A e B e cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti in A e B:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}]$$

- Proprietà

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

- N.B: Vale anche per le matrici NON quadrate

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

PRODOTTO DI UN NUMERO PER UNA MATRICE

- Dati la matrice $\mathbf{A(m,n)}= [a_{ij}]$ e il numero n, il prodotto della matrice per il numero è $\mathbf{C(m,n)} = [\mathrm{n}^* c_{ij}]$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{n} = 7$$

$$\boldsymbol{C} = n * \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 35 \\ 14 & 21 & 0 \\ 35 & 0 & 42 \end{bmatrix}$$

N.B. Per indicare una matrice si usa il «**grassetto**» in modo da distinguerla dai numeri che si indicano in modo normale

ESERCIZIO

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni.

$$A + B$$

$$A - 2B$$

$$-3A + 5B.$$

ESERCIZIO

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcola le seguenti espressioni.

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix};$$

$$-3A + 5B. = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 9 \\ 10 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

PRODOTTO TRA DUE MATRICI

- Può essere eseguito solo se il numero delle COLONNE della prima matrice è uguale al numero di RIGHE della seconda matrice
- Date le due matrici $\mathbf{A}(\mathbf{m},\mathbf{p}) = [a_{ik}]$ e $\mathbf{B}(\mathbf{p},\mathbf{n}) = [b_{kj}]$ la matrice prodotto $\mathbf{C}(\mathbf{m},\mathbf{n}) = [c_{ij}]$ ha gli elementi espressi da

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*8+2*50+5*10+5*20 \\ 286 \\ 260 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA DUE MATRICI

- **AB** $\neq$ **BA** (NON vale la proprietà commutativa, bisogna prestare attenzione all'ordine della matrici)
- **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**
- **A**(**BC**) = (**AB**)**C**
- **AB** = **0** NON implica **A** = **0** oppure **B** = **0** (anche questo è poco intuitivo)

ESERCIZIO

- Calcolare, se è possibile, i seguenti prodotti tra vettori

$$[1 \quad 3 \quad 2 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[2 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[2 \quad 0 \quad -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

- Calcolare, se è possibile, i seguenti prodotti tra vettori

$$[1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; -2] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

= -4

$$[2 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

= 0

$$[2 \;\; 0 \;\; -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Non è possibile calcolare il prodotto perché il numero di colonne della primo vettore e di righe del secondo è diverso

ESERCIZIO

- Calcolare, se è possibile, i seguenti prodotti tra matrici

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -1 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

- Calcolare, se è possibile, i seguenti prodotti tra matrici

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -1 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & -4 \\ -1 & 10 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Non è possibile calcolare il prodotto perché il numero di colonne della prima matrice e di righe della seconda è diverso

$$\begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x & -x \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -x \\ 2x & 0 \\ x-2x^2 & x^2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

- Date le matrici A e B, determinare i prodotti A*B e B*A e verificare che NON vale la proprietà commutativa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO

- Date le matrici A e B, determinare i prodotti A*B e B*A e verificare che non vale la proprietà commutativa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 76 & 0 & -1 \\ 23 & 0 & -23 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} -18 & 45 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

MATRICE TRASPOSTA

- Data la matrice $A(m,n) = [a_{ij}]$ si chiama MATRICE TRASPOSTA la matrice $A^T(n,m) = [a_{ji}]$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A^T = A$ se la matrice è quadrata e simmetrica
- Il trasposto di un vettore colonna è un vettore riga (e viceversa)

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

- Si calcola solo per le matrici quadrate ed è un numero reale
- Il determinante di una matrice di ordine 1 è uguale al numero stesso che compare nella matrice

$$|a| = a$$

- Il determinante di una matrice di ordine 2 è uguale alla differenza fra il prodotto dei due elementi della diagonale principale e il prodotto dei due elementi della diagonale secondaria

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE

- Nel caso di matrici di ordine n, si considera una colonna che indicheremo con j. Una volta fissata la colonna j, si sommano i determinanti delle sottomatrici <u>minori</u> A_{ij} ottenute togliendo la riga i e la colonna j della matrice di partenza A_n secondo la formula

$$\det(\mathbf{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \boxed{\left[(-1)^{i+j} * \det(A_{ij}) \right]}$$

Cofattore o complemento algebrico di A_n relativo alla posizione ij

ESEMPIO: DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3X3

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

si sceglie per esempio la prima colonna (j=1)

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1}&\cancel{2}&\cancel{3}\\ \cancel{4}&5&6\\ \cancel{7}&8&9\end{pmatrix}$$

MINORE A_{11}

i=1 j=1

$$A=\begin{pmatrix}\cancel{1}&2&3\\ \boxed{4}&\cancel{5}&\cancel{6}\\ \cancel{7}&8&9\end{pmatrix}$$

MINORE A_{21}

i=2 j=1

MINORE A_{31}

$$A=\begin{pmatrix}\cancel{1}&2&3\\ \cancel{4}&5&6\\ \boxed{7}&\cancel{8}&\cancel{9}\end{pmatrix}$$

i=3 j=1

$$det(A)= 1\underbrace{\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}}_{\text{MINORE } A_{11}} - 4\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}}_{\text{MINORE } A_{21}} + 7\underbrace{\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}}_{\text{MINORE } A_{31}}$$

$$\begin{aligned} det(A)=&(-1)^{1+1}\, 1\, [(5\cdot 9)-(6\cdot 8)] +\\ &+(-1)^{2+1}\, 4\, [(2\cdot 9)-(3\cdot 8)] +\\ &+(-1)^{3+1}\, 7\, [(2\cdot 6)-(3\cdot 5)] = 0\end{aligned}$$

ESERCIZIO

- Calcolare, se possibile, i determinanti delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 6 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

- Calcolare, se possibile, i determinanti delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 7$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 6 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Non è possibile calcolare il determinante perché la matrice non è quadrata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 9 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -41$$

MATRICI SINGOLARI

- Una matrice (quadrata) con DETERMINANTE NULLO si dice SINGOLARE
- Il determinante di una matrice **A** si annulla
  1. Se in **A** c'è almeno una riga (colonna) nulla
  2. Se in **A** ci sono almeno due righe (colonne) uguali
  3. Se in **A** ci sono due righe (colonne) proporzionali
  4. Se in **A** c'è una riga (colonna) che è combinazione lineare di almeno due righe (colonne) di **A**

ESERCIZIO

- Dire per quale motivo i seguenti determinanti <u>sono tutti nulli</u>

1
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

7
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 11 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

8
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSA DI UNA MATRICE

- Sia data una matrice $\mathbf{A}$ quadrata non singolare
- La matrice $\mathbf{A}$ non è singolare se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- La matrice inversa di $\mathbf{A}$ si indica con $\mathbf{A}^{-1}$ ed è l'unica matrice che soddisfa la relazione $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- Se la matrice $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ di ordine n è non singolare, la sua inversa risulta

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_n} (\mathrm{cof}\, A_n\,)^T$$

in cui cof $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ è la matrice dei cofattori (e T indica la trasposizione)

$$\mathrm{cof}\, A = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}_{1,1}(A) & \dots & \mathrm{cof}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}_{n,1}(A) & \dots & \mathrm{cof}_{n,n}(A) \end{pmatrix}$$

Cofattore o complemento algebrico di $\mathbf{A}_\mathrm{n}$ relativo alle posizione nn

INVERSA DI UNA MATRICE 2X2

$$\boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\boxed{ad-bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

det(A)

ESERCIZIO

- Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

- Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$$ (quindi A è invertibile)

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO

- Calcolare le matrici inverse di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$C=A*B$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

- Calcolare le matrici inverse di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C=A*B \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA CON EXCEL

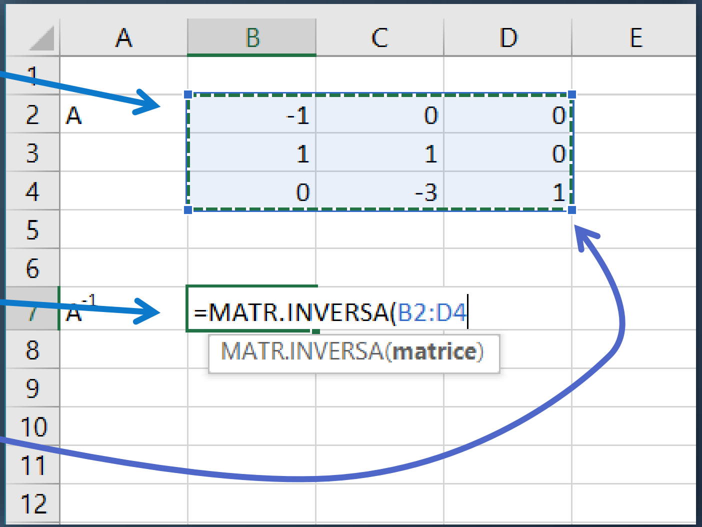
1- Scrivere la matrice, un valore per ogni cella

2- Spostarsi in basso e scrivere
=MATR.INVERSA(

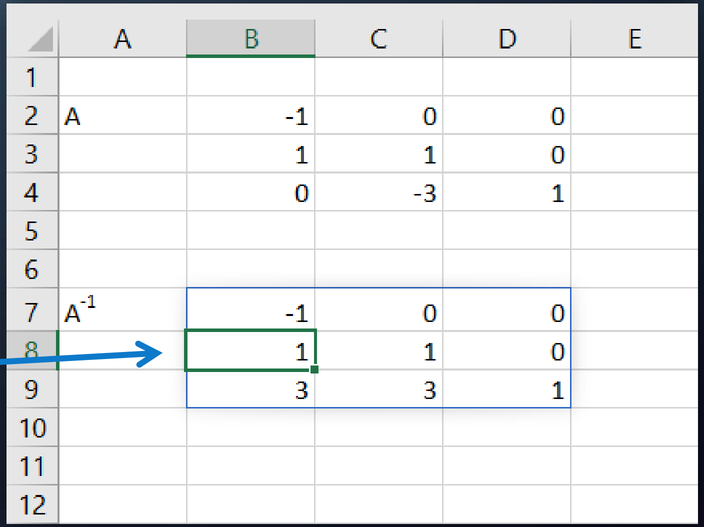
3- Selezionare la matrice che si vuole invertire con il mouse

4- Chiudere l'ultima parentesi
=MATR.INVERSA(B2:D2)

5- Premere invio, se Excel avverte che la formula occuperà anche celle vicine, confermare che va bene



6- Comparirà la matrice inversa



SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

- Si consideri un sistema di m equazioni lineari in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

- Può essere scritto in forma matriciale

A*x=b

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Se **b** è un vettore nullo, il sistema si dice omogeneo e una soluzione è sicuramente $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ (ce ne possono essere tuttavia anche delle altre diverse da zero)

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + 7y + 4z = 12 \\ 3y + 2z = 7 \\ 2x + 12z = 3 \end{cases}$$

può essere scritto come $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 12 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

quindi nella forma **A*x=b** con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

- Un sistema di equazioni lineari può essere:
  - IMPOSSIBILE se non ha alcuna soluzione
  - DETERMINATO se ha una sola soluzione
  - INDETERMINATO se ha infinite soluzioni
- Un sistema è determinato se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (quindi condizione necessaria, ma non sufficiente affinché il sistema sia determinato è che il numero di equazioni sia uguale al numero di incognite)
- Se un sistema è determinato ed è scritto nella forma **A*x=b** per risolverlo è sufficiente calcolare l'inversa di A e si ha che

$$\boxed{\mathbf{x} = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{b}}$$

Incognite da determinare

ESERCIZIO

- Risolvere il sistema lineare $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

ESERCIZIO

- Risolvere il sistema lineare $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

	A	B	C	D
1				
2	A	2	1	
3		1	1	
4				
5				
6	A^{-1}	1	-1	
7		-1	2	
8				
9				

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

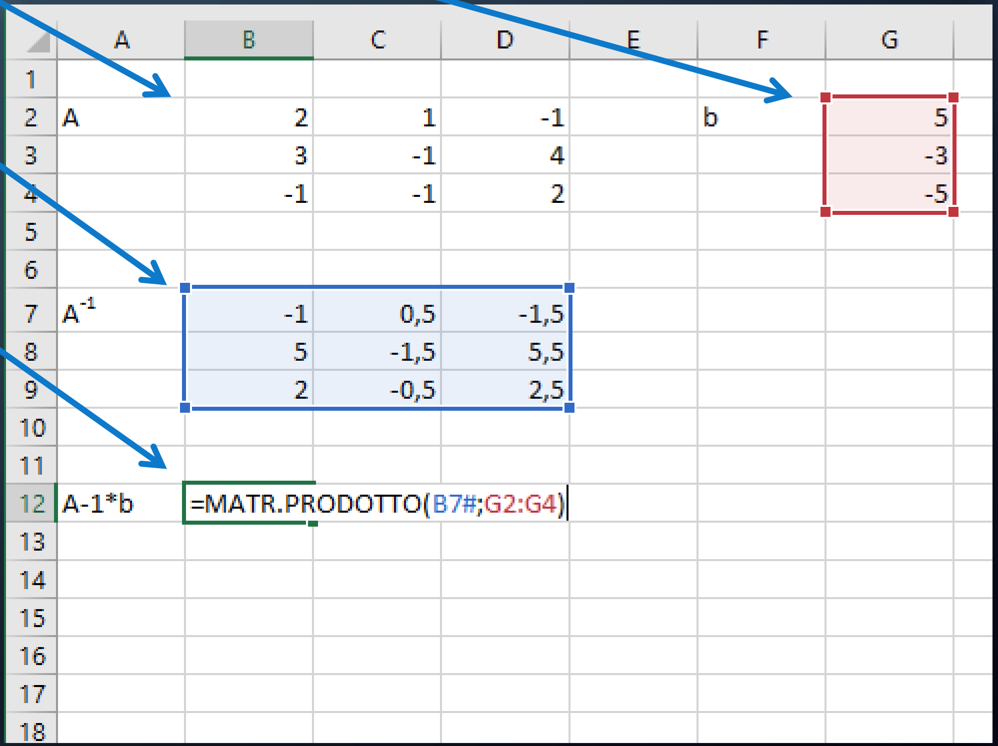
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -1 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$x = -4$; $y = 9$

RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE CON EXCEL

1. Individuare le matrici **A**, **x** e **b** e scrivere in Excel **A** e **b**
2. Invertire **A** e trovare $\mathbf{A}^{-1}$
3. Sportarsi in basso e scrivere
   =MATR.PRODOTTO(
4. Selezionare la matrice $\mathbf{A}^{-1}$
5. Inserire un “;” e quindi selezionare la matrice **b**
6. Chiudere la parentesi e premere invio. Se Excel avverte che la formula occuperà anche celle vicine, confermare che va bene

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = -3 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	A	2	1	-1		b	5
3		3	-1	4			-3
4		-1	-1	2			-5
5							
6							
7	A^{-1}	-1	0,5	-1,5			
8		5	-1,5	5,5			
9		2	-0,5	2,5			
10							
11							
12	A-1*b	=MATR.PRODOTTO(B7#;G2:G4)					
13							
14							
15							
16							
17							
18							

RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE CON EXCEL

7. Comparirà la matrice **x**, ovvero la soluzione del sistema.
8. Nel caso venga segnalato un errore, controllato che non vi siano errori di immissione, questo significa che il sistema non è determinato (cioè o non ha soluzioni, o ha infinite soluzioni)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	A	2	1	-1		b	5
3		3	-1	4			-3
4		-1	-1	2			-5
5							
6							
7	A^{-1}	-1	0,5	-1,5			
8		5	-1,5	5,5			
9		2	-0,5	2,5			
10							
11							
12	A-1*b	1					
13		2					
14		-1					
15							
16							
17							
18							

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = -3 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

x=1 ; y=2 ; z=-1